ПРОЕКТ ПО МАТЕМАТИКЕ

«50 ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

Выполнила: Позднякова Полина,

ученица 11 «А» класса

МБОУ Щёлковский лицей №7.

Руководитель: Позднякова Ольга Вячеславовна.

2018 год

Оглавление

1. Введение 3
2. Теория
	1. Проценты 5
	2. Платежи 5
	3. Таблицы 5
	4. Арифметическая и геометрическая прогрессии 7
	5. Производная 8
3. Практическое решение экономических задач

3.1 Кредиты

1 тип: Нахождение количества лет (месяцев) выплаты кредита. (Аннуитетные платежи) 10

2 тип: Вычисление процентной ставки по кредиту. (Фиксированные платежи) 13

3 тип: Нахождение суммы кредита. (Аннуитетные платежи) 16

4 тип: Нахождение ежегодного ( ежемесячного) транша.(Аннуитетные платежи) 19

5 тип: Нахождение разницы. (Аннуитетные платежи) 22

6 тип: Задачи, связанные с известным остатком. (Фиксированные платежи) 25

7 тип: Задачи, связанные с дифференцированными платежами 28

8 тип: Нестандартные задачи, связанные с кредитом 32

3.2 Вклады 36

3.3 Задачи на оптимизацию 44

* 1. Нестандартные задачи 56

4.Заключение 61

5.Список литературы 61

1. **Введение**

Экономическую задачу ввели в экзамен ЕГЭ «Профиль по математике» только с 2015 года. Она стала называться заданием номер 17 и по своей сложности находится на одном уровне с заданиями на параметры и теорию чисел.

Приведу примеры статистики сдачи ЕГЭ по математике (профильный уровень) за 2016 и 2017 годы (использовала данные с сайта ФИПИ)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Не сдали экзамен | Сдали экзамен | Средний балл | Количество 100-бальников |
| 2017 | 14,34% | 85,66% | 47,1 балл | 224 учащихся |
| 2016 | 15,33% | 84,67% | 46,3 балла | 296 учащихся |

Решение задания номер 17

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | Набрали ненулевой балл (от сдавших экзамен учащихся) | Набрали ненулевой балл (от всех учащихся) | Набрали максимальный балл (от сдавших экзамен учащихся) | Набрали максимальный балл (от всех учащихся) | Доля учащихся |
| 2017 | 14,8% | 12,68% | 8% | 6,85% | Каждый 15 |
| 2016 | 13% | 11% | Нет данных | Нет данных | Нет данных |

 Такая статистика решения экономической задачи объясняется и сложностью задания и просто тем, что такой темы просто нет в наших учебниках по алгебре. Поэтому у меня и появилась идея написать методичку «50 экономических задач для подготовки к сдаче ЕГЭ «Профиль по математике»», ***целью которой является подготовка учащихся к ЕГЭ.***

Конечно, на различных сайтах и в математической литературе можно найти решения таких задач, но зачастую либо они содержат много лишней информации, либо они решены непонятным для меня способом. Я же использовала табличный метод, так как считаю его самым наглядным и простым.

Из необходимых знаний и умений мне понадобились:

1. Определение понятия «Процент»
2. Определение понятий «Фиксированные платежи», «Аннуитетные платежи» и «Дифференцируемые платежи».
3. Виды мною созданных таблиц
4. Определение, формулы n-ого члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий
5. Знание алгоритмов нахождения промежутков возрастания (убывания) функций и точек экстремума.

Каждую неделю, начиная с сентября 2016 года, я решала по две экономических задачи. Условия таких задач я брала:

1. ЕГЭ 2018 под редакцией А. Л. Семенова, И.В. Ященко
2. Открытый банк заданий ЕГЭ fipi.ru
3. Сайт «Решу ЕГЭ»
4. И мой любимый сайт «Алекс Ларин»

 ***Всего я решила примерно 152 задачи, выбрала из них 50 задач,*** разделив их условно на типы:

 ***Кредиты.***

***1 тип: Нахождение количества лет (месяцев) выплаты кредита. (Аннуитетные платежи) -*** 3 задачи

***2 тип: Вычисление процентной ставки по кредиту.* *(Фиксированные платежи)*** – 3 задачи

***3 тип: Нахождение суммы кредита*. *(Аннуитетные платежи)***- 3 задачи

***4 тип: Нахождение ежегодного (ежемесячного) транша. (Аннуитетные платежи)***- 3 задачи

***5 тип*: Нахождение разницы. *(Аннуитетные платежи) –*** 3 задачи

***6 тип: Задачи, связанные с известным остатком. (Фиксированные платежи)-*** 3 задачи

***7 тип: Задачи, связанные с дифференцированными платежами.***- 3 задачи

***8 тип: Нестандартные задачи, связанные с кредитом.-*** 4 задачи

 ***Вклады. –*** 8 задач

***Задачи на оптимизацию. -***12 задач

 ***Нестандартные задачи.-***5 задач

Конечно, наиболее трудными среди экономических задач считаются задачи на тему «Оптимизация» и нестандартные задачи с сайта «Алекс Ларин».

**2.Теория.**

Решение финансовых задач основывается на использовании различных математических моделей: уравнений, неравенств, их систем с привлечением процентов, арифметической и геометрической прогрессий и производной. Приведу основные определения, понятия, таблицы и формулы.

 ***2.1 Проценты.***

Определение: один процент – это одна сотая доля. Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь.

Пример: 5% от 80 это будет 0,05

r% от 14 это будет 0,01r

При решении задач необходимо понимать механизм начисления процентов по вкладам или кредитам. Например, если банк выдаёт кредит (S) клиенту, то через год клиент должен банку не только сумму кредита, но и некий процент (r). Возникает необходимость введения нового коэффициента b, b=1+0,01r. С учётом этого , долг клиента банку через год можно записать следующим образом:

S + r% от S = S + 0,01r = S (1 + 0,01r) = bS

***2.2 Платежи.***

В задачах по теме «Кредит» используют о три основных вида платежа:

1. *Ф****иксированные платежи*** (платежи, которые чётко оговариваются в условии задачи)
2. ***Аннуитетные платежи*** (постоянные ежемесячные или ежегодные платежи, которые не меняются на протяжении всего периода кредитования)
3. ***Дифференцируемые платежи*** (ежемесячные или ежегодные платежи, уменьшающиеся к концу срока кредитования и обеспечивающие уменьшение суммы долга на одну и ту же величину*)*

***2.3 Таблицы.***

При решении задач, связанных с ***аннуитетными платежами*** мне было очень удобно заполнять следующую таблицу:

S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты

b=1+0,01r – коэффициент

х – ежегодная (ежемесячная) выплата

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb  | x | Sb3-x b2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Sb4-xb3-xb2-xb-x |
| 5 год | (Sb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb5-xb4-xb3-xb2-xb | x |  Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x |
| 6 год | (Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb | x | Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb-x |
| n год | Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb | x | Полная выплата, долг равен 0 |

При решении задач, связанных с ***дифференцированными платежами*** я использовала следующую таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| n-1 |  |  |  |
| n |  |  | 0 |

При решении задач по теме «Вклады»:

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Вклад с % |
| 0 |  |
| 1 | Sb |
| 2 | Sb2 |
| n | Sbn |

При решении задач, в которых осуществлялись какие-либо действия (пополнение или снятие денег с вклада):

х – действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | +х | Sb+x |
| 2 год | b(Sb+x)= Sb2+xb | +х | Sb2+xb+x |
| 3 год | b(Sb2+xb+x)=Sb3\_+хb2+xb | Снял вклад |  |

***2.4 Арифметическая и геометрическая прогрессии.***

Арифметическая прогрессия

Определение. Последовательность чисел, в которой каждое следующее отличается от предыдущего ровно на одну и ту же величину, называется *арифметической прогрессией*.

Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

 = + (n-1)d

Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии

Sn =

С учётом этой формулы : (n-1) + (n-2) +…+3+2+1 = =

 = =

 = =

Геометрическая прогрессия

Определение. *Геометрической прогрессией* называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Любой член геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

bn =b1· qn-1

Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии

Sn=

Из этой формулы следует: bn-1+bn-2 +…+b2+b+1=

***2.5 Производная.***

Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

Если производная данной функции положительна для всех значений х в интервале (а; в), т.е. f'(x) > 0, то функция в этом интервале возрастает.
Если производная данной функции отрицательна для всех значений х в интервале (а; в), т.е. f'(x) < 0, то функция в этом интервале убывает

Порядок нахождения промежутков монотонности:

 Найти область определения функции.

1. Найти производную функции.

2. Найти критические точки (точки, в которых производная не существует) и стационарные (точки, в которых производная равна нулю). Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные точки делят область определения функции.

 Достаточное условие существования максимума состоит в смене знака производной при переходе через критическую точку с "+" на "-", а для минимума с "-" на "+". Если при переходе через критическую точку смены знака производной не происходит, то в данной точке экстремума нет

***Пример:***

f(x) =

Найдём производную.

 =( ), = = = =
Критические точки = 1, = -1

Стационарные точки = = - , = 0



***Ответ: возрастает (-;+***

 ***убывает ; -***

 ***= ; = .***

**3.Практическое решение экономических задач.**

***3.1 Кредиты.***

***1 тип: Нахождение количества лет ( месяцев) выплаты кредита.***

 ***n-? (Аннуитетные платежи)***

Задача №1

*Максим хочет взять кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами ( кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?*

***Решение:***

Кредит (S) 1500000 руб.

Ставка (r) 10% годовых. Введём коэффициент b=1+0,01r

Ежегодная выплата (х) ≤350000 руб.

Сколько лет (n)-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | 1500000 |
| 1 год | 1500000•1,1=1650000 | 350000 | 1300000 |
| 2 год | 1300000•1,1=1430000 | 350000 | 1080000 |
| 3 год | 1080000•1,1=1188000 | 350000 | 838000 |
| 4 год | 838000•1,1=921800 | 350000 | 571800 |
| 5 год | 571800•1,1=628980 | 350000 | 278980 |
| 6 год | 278980•1,1=306878 | 306878 | 0 |

***Ответ: 6 лет.***

Задача №2

*1 января 2015 года Андрей Владимирович взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Андрей Владимирович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Владимирович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?*

***Решение.***

Кредит (S) 1100000 руб.

Ставка (r) 3% годовых. Введём коэффициент b=1+0,01r

Ежемесячная выплата (х) ≤220000 руб.

Сколько месяцев (n)-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | 1100000 |
| 1 | 1100000•1,03=1133000 | 220000 | 913000 |
| 2 | 913000•1,03=940390 | 220000 | 720390 |
| 3 | 720390•1,03=74200,17 | 220000 | 522001,7 |
| 4 | 522001,7•1,03=537661,75 | 220000 | 317661,75 |
| 5 | 317661,75•1,03=327191,6 | 220000 | 107191,6 |
| 6 | 107191,6•1,03=110407,35 | 110407.35 | 0 |

***Ответ: 6 месяцев.***

Задача №3.

*1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?*

***Решение.***

Кредит (S) 1000000 руб.

Ставка (r) 1% годовых. Введём коэффициент b=1+0,01r

Ежемесячная выплата (х) ≤125000 руб.

Сколько лет –(n)-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | 1000000 |
| 1 месяц | 1000000•1,01=1010000 | 125000 | 885000 |
| 2 месяц | 885000•1,01=893850 | 125000 | 768850 |
| 3 месяц | 768850•1,01=776538,5 | 125000 | 651538,5 |
| 4 месяц | 651538,5•1,01=658053,9 | 125000 | 533053,9 |
| 5 месяц | 533053,9•1,01=538384,44 | 125000 | 413384,44 |
| 6 месяц | 413384,44•1,01=417518,28 | 125000 | 292518,28 |
| 7 месяц | 292518,28•1,01=295443,46 | 125000 | 170443,46 |
| 8 месяц | 170443,46•1,01=172147,89 | 125000 | 47147,89 |
| 9 месяцев | 47147,89•1,01=47619,37 | 47619,37 | - |

***Ответ: 9 месяцев.***

***2 тип: Вычисление процентной ставки по кредиту.***

**r-? *(Фиксированные платежи)***

Задача №1

*31 декабря 2014 года Борис взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Борис переводит очередной транш. Борис выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 560 тыс. рублей, во второй – 661,1 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Борису?*

***Решение*** Кредит (S) 1000000 руб.

 Введём коэффициент b=1+0,01r

 1 год выплата – x1=560000руб.

 2 год выплата – x2=644100 руб.

r-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x1 | Sb-x1 |
| 2 год | b(Sb-x1) =Sb2-bx1 | x2 | - |

Sb2-x1b=x2

1000000b2-560000b-644100=0

10000b2-5600b-6441=0

D=56002+4•10000•6441=31360000+257640000=289000000

b1==1,13

b2==-0,57 не подходит по условию задачи.

b=1+0,01r

r=13

***Ответ: 13***

Задача №2.

*31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 510 тыс. рублей, во второй – 649 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Антону?*

 ***Решение:***

 Кредит (S) 1000000 руб.

 Введём коэффициент b=1+0,01r

 1 год выплата – x1=510000руб.

 2 год выплата – x2=649000 руб.

r-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x1 | Sb-x1 |
| 2 год | b(Sb-x1) =Sb2-bx1 | x2 | - |

Sb2-x1b=x2

1000000b2-510000b-649000=0

10000b2-5100b-649=0

D=51002+4•10000•649=260100+2596000=2856100

b1==1,1

b2==-0,59 не подходит по условию задачи.

***Ответ: r =10***

Задача№3.

*31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсентий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй – 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?*

 ***Решение:***

 Кредит (S) 1000000 руб.

 Введём коэффициент b=1+0,01r

 1 год выплата – x1=550000руб.

 2 год выплата – x2=638400 руб.

r-?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x1 | Sb-x1 |
| 2 год | b(Sb-x1) =Sb2-bx1 | x2 | - |

Sb2-x1b=x2

1000000b2-550000b-638400=0

10000b2-5500b-6384=0

D=55002+4•10000•6384=30250000+255360000=285610000

b1==1,12

b2==-0,57 не подходит по условию задачи.

***Ответ: r=12.***

***3 тип: Нахождение суммы кредита.***

**S-? *(Аннуитетные платежи)***

Задача №1.

*31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на 12%), затем Сергей переводит в банк 3512320 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами ( то есть за три года)?*

***Решение:***

Ставка (r) - 12% , b=1,12

Ежегодная выплата (х) - 3512320 рублей

Количество лет (n) 3 года

Сумма кредита (S) -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3\_ хb2-xb =x

Sb3-(1+b+b2)x=0

S=

***Ответ: 8436000рублей.***

Задача №2.

*31 декабря 2014 года Игорь взял в банке некоторую сумму в кредит под 13% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на 13%), затем Игорь переводит в банк 5107600 рублей. Какую сумму взял Игорь в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами ( то есть за два года)?*

***Решение:***

Ставка (r) - 13%, b=1,13

Ежегодная выплата (х) - 5107600 рублей

Количество лет (n) 2 года

Сумма кредита (S) -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

S=

***Ответ: 8520000 рублей.***

Задача№3.

*31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга ( то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами ( то есть за четыре года)?*

 ***Решение:***

 Ставка (r) - 10%

 b=1,1

 Ежегодная выплата (х) - 2928200 рублей

 Количество лет (n) 4 года

 Сумма кредита (S) -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb | x | Sb3-x b2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Полная выплата - остаток 0 |

Sb4-xb3-xb2-xb =x

Sb4-(1+b+b2+ b3)x=0

S=

***Ответ: 9282000 рублей.***

***4 тип: Нахождение ежегодного ( ежемесячного) транша.***

**х-? *(Аннуитетные платежи)***

Задача №1.

*31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000рублей в кредит по 10% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами ( то есть за четыре года)?*

***Решение:***

Сумма кредита (S)- 9282000рубля

Ставка (а)=10%, b=1,1

Количество лет (n) 4 года

Ежегодная выплата ( транш) Х -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb | x | Sb3-x b2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Полная выплата - остаток 0 |

Sb4-xb3-xb2-xb =x

Sb4-(b+b2+b3)x=x

Sb4-(1+b+b2+b3)x=0

X=

X=

***Ответ: 2928200 рублей.***

Задача №2.

*31 декабря 2014 года Иван взял в банке 4230000 рублей в кредит по 11,5% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11,5%), затем Иван переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Иван выплатил долг двумя равными платежами ( то есть за два года)?*

Сумма кредита (S)- 4230000рубля

Ставка (а)=11,5%, b=1,115

Количество лет (n) 2 года

Ежегодная выплата ( транш) Х -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

X=

***Ответ: 2486450рублей.***

Задача №3.

*31 декабря 2014 года Павел взял в банке 6327000 рублей в кредит по 12% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Павел переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Павел выплатил долг тремя равными платежами ( то есть за три года)?*

***Решение:***

Сумма кредита (S)- 6327000 рубля

Ставка (а)=12%,b=1,12

Количество лет (n) 3 года

Ежегодная выплата ( транш) Х -?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3\_ хb2-xb =x

Sb3-(b2-b)x=x

Sb3-(1+b+b2)x=0

X==

***Ответ: 2634240 рублей.***

***5 тип*: Нахождение разницы. *(Аннуитетные платежи)***

Задача №1.

*31 декабря 2014 года Федор взял в банке 6951000рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Федор переводит в банк платеж. Весь долг Федор выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?*

***Решение***: Сумма кредита (S) – 6951000 рублей

Ставка (r) -10%, b=1,1

3 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3- хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0

X=

2 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

За три года: 27951003=8385300

За два года:40051002=8010200

Разница: 8385300-8010200=375100

***Ответ: на 375100 рублей.***

Задача №2.

*31 декабря 2014 года Степан взял в банке 4004000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Степан переводит в банк платеж. Весь долг Степан выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?*

***Решение:*** Сумма кредита (S) – 4004000 рублей

Ставка (r) -20%, b=1,2

3 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3-хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0

X=

2 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

За 3 года выплатил: 3\*1900800=5702400

За два года: 2\*2620800=5241600

Разница: 5702400-5241600=460800

***Ответ: 460800 рублей.***

Задача №3.

*31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 3689000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк платеж. Весь долг Алексей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?*

***Решение:*** Сумма кредита (S) – 3689000 рублей

Ставка (r) -12,5%, b=1,125

3 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 год | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3-хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0

X=

2 равных платежа

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | х | Sb-x |
| 2 год | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | - |

Sb2-xb=x

Sb2-(1+b)x=0

X=

За три года: 15491253=4647375

За два года:21971252=4394250

Разница: 4647375-4394250=253125

***Ответ: 253125 рублей.***

 ***6 тип: Задачи, связанные с известным остатком. (Фиксированные платежи)***

Задача №1.

*15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| **Долг (в процентах от кредита)** | 100% | 90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 0% |

*В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?*

***Решение:*** S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты (5%)

b=1+0,01r – коэффициент (1,05)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 15.01 |  |  | S |
| 15.02 | Sb | Sb-0,9S | 0,9S |
| 15.03 | 0,9Sb | 0,9Sb -0,8S | 0,8S |
| 15.04 | 0,8Sb | 0,8Sb -0,7S | 0,7S |
| 15.05 | 0,7Sb | 0,7Sb -0,6S | 0,6S |
| 15.06 | 0,6Sb | 0,6Sb -0,5S |  0,5S |
| 15.07 | 0,5Sb | 0,5Sb  | Полная выплата - остаток 0 |

Общая сумма выплат:

(Sb+0,9Sb+0,8Sb+0,7Sb+0,6Sb+0,5Sb)-(0,9S+0,8S+0,7S+0,6S+0,5S)=

4,5Sb-3,5S=S(4,5b-3,5)=S(4,5\*1,05-3,5)=1,225S

***Ответ: 22,5 процента.***

Задача №2.

*15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:*

*− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*− 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| Долг (в млн рублей) | 1 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |

*Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн рублей.*

***Решение:*** S – сумма кредита (1000000рублей)

 Найти : r% - годовые (ежемесячные) проценты

b=1+0,01r – коэффициент

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 15.01 |  |  | S |
| 15.02 | Sb | Sb-0,6S | 0,6S |
| 15.03 | 0,6Sb | 0,6Sb -0,4S | 0,4S |
| 15.04 | 0,4Sb | 0,4Sb -0,3S | 0,3S |
| 15.05 | 0,3Sb | 0,3Sb -0,2S | 0,2S |
| 15.06 | 0,2Sb | 0,2Sb -0,1S | 0,1S |
| 15.07 | 0,1Sb | 0,1Sb | Полная выплата - остаток 0 |

Общая сумма выплат:

(Sb+0,6Sb+0,4Sb+0,3Sb+0,2Sb+0,1Sb)-(0,6S+0,4S+0,3S+0,2S+0,1S)=

2,6Sb-1,6S=S(2,6b-1,6)=1\*(2,6b-1,6)=2,6b-1,6

2,6b-1,6<1,2 ; 2,6b<2,8 ; b<1,076 ; b=1,07 ; r=7

***Ответ: 7 процентов.***

Задача №3.

*В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы*

*− каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;*

*− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;*

*− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 |
| Долг(в тыс. рублей) | S | 0,7S | 0,4S | 0 |

*Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.*

***Решение:*** S – сумма кредита

r% - годовые (ежемесячные) проценты (15%)

b=1+0,01r – коэффициент (1,15)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 2016 |  |  | S |
| 2017 | Sb | Sb-0,7S | 0,7S |
| 2018 | 0,7Sb | 0,7Sb -0,4S | 0,4S |
| 2019 | 0,4Sb | 0,4Sb | Полная выплата - остаток 0 |

1 выплата 1,15S-0,7S= 0,45S=

2 выплата 0,7\*1,15S-0,4S= 0,405S=

3 выплата 0,4\*1,15S= 0,46S=

По условию, все выплаты должны быть целыми. Значит, число *S* должно делиться на 20, 200 и 50. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 200.

***Ответ: 200 тысяч.***

***7 тип: Задачи, связанные с дифференцированными платежами.***

Задача №1.

*Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.*

***Решение:*** Сумма кредита (S), ставка (r) -? %, b=1+0,01r

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |
| 10 |  |  |  |
| 11 |  |  |  |
| 12 |  |  | 0 |

Sb(1+)-S)=1,13S

-=1,13S /S

-=1,13

78b=1,13\*12+66

b=1,02

r=2%

***Ответ:2%.***

Задача 2.

*15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:*

*- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;*

*- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.*

*Известно, что на пятый месяц кредитования нужно выплатить 57,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?*

***Решение:*** Сумма кредита (S)

Ставка (r) -3 %, b=1,03 n=9 Сумма всех выплат =?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  | 0 |

=57,5

5Sb-4S=517,5

S(5b-4)=517,5

S(5\*1,03-4)=517,5

S=450

Sb(1+)-S)=5Sb-4S=

450\*(5\*1,03-4)=450\*1,15=517,5

***Ответ:517,5 тысяч.***

Задача 3.

*15-го января планируется взять кредит в банке на несколько месяцев. Условия его возврата таковы:*

*— 1-го числа каждого месяца долг возврастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;*

*— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;*

*— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.*

*На сколько месяцев можно взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. (решение с помощью формулы суммы арифметической прогрессии)*

***Решение:*** Сумма кредита (S) , ставка (r) -5 %, b=1,05 n=?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| n-1 |  |  |  |
| n |  |  | 0 |

Sb()-S)=1,25S

По формуле суммы арифметической прогрессии получаем

Sb\*- S\*=1,25S /S

b\*-=1,25

1,05\*(n+1)-(n-1)=2,5

1,05n+1,05-n+1=2,5

0,05n=0,45

n=9

***Ответ: 9 месяцев.***

***8 тип: Нестандартные задачи, связанные с кредитом.***

 Задача 1.

*В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:*

*— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.*

*— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.*

*— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6,6 млн. руб.*

*— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.*

*Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.*

***Решение:*** S=6,6

r% =? b=1+0,01r

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 2016 |  |  | S |
| 2017 | Sb | Sb-S | S |
| 2018 | Sb | Sb-S | S |
| 2019 | Sb | Sb-S | S |
| 2020 | Sb | x | Sb-x |
| 2021 | (Sb-x)b= Sb2-xb | x | 0 |

1)Sb2-xb=x

2)3Sb-3S+2x=12,6

19,8b-19,8+2x=12,6

x=16,2-9.9b

1)6,6 b2 –(16,2-9,9b)b=16,2-9,9b

6,6 b2 -16,2b+9,9 b2 =16,2-9,9b

16,5 b2 -6,3b-16,2=0

165 b2 -63b-162=0

D=632+4•162•165=110889

b1=1,2

b2= -0,81не подходит по условию задачи.

***Ответ: r=20.***

Задача №2.

*1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?*

***Решение:***

Сумма кредита (S)-?

Ставка (а)=10%, b=1,1

Количество лет (n) 3 года

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 2010 |  |  | S |
| 2011 | Sb | x | Sb-x |
| 2012 | (Sb-x)b=Sb2-xb | 2x | Sb2-xb-2x |
| 2013 | (Sb2-xb-2x)b=Sb3-xb2-2xb  | 3х | Полная выплата - остаток 0 |

x+2x+3x=2395800

6x=2395800

x=399300

Sb3\_ хb2-2xb =3x

Sb3-(3+2b+b2)x=0

S=

***Ответ: 1923000рублей.***

Задача №3.

*Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.*

*По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).*

*По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи). Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?*

***Решение:*** Сумма кредита (S) – 331000 рублей

Ставка (r) -10%, b=1,1

Аннуитетные платежи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 месяц | Sb | х | Sb-x |
| 2 месяц | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 месяц | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | - |

Sb3\_ хb2-xb=x

Sb3-(b2+b+1)x=0



3х=399300

Дифференцированные платежи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  | 0 |

Sb(1+)-S)=2Sb-S

2\*331000\*1,1- 331000=331000\*1,2=397200

399300 – 397200= 2100

***Ответ: дифференцированные платежи, выгода 2100 рублей.***

Задача №4.

*Петр Иванович взял кредит на несколько лет и выплатил его равными ежегодными платежами по 200000 руб. При этом в начале каждого года сумма текущего долга увеличивалась на 10 %, а в конце года производился платёж. Если бы Петр Иванович не делал платежей, то за это время вследствие начисления процентов сумма кредита составила бы 928200 руб. На сколько лет был взят кредит?*

***Решение:***

Кредит (S)

 Введём коэффициент b=1+0,01r

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Долг с % |
| 0 |  |
| 1 | Sb |
| 2 | Sb2 |
| 3 | Sb3 |
| n год | Sbn |

Sbn=928200,ставка (r) -10%, b=1,1

х= 200000рублей, аннуитетные платежи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг с % | Платёж | Долг после выплаты |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | х | Sb-x |
| 2 | b(Sb-x)= Sb2-xb | х | Sb2-xb-x |
| 3 | b(Sb2-xb-x )=Sb3\_ хb2-xb | х | Sb3\_ хb2-xb-x |
| n год | Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb | x | Полная выплата, долг равен 0 |

Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb-x=0

Sbn-x(bn-1+bn-2 +…+b2+b+1)=0

По формуле суммы геометрической прогрессии

bn-1+bn-2 +…+b2+b+1=

Sbn- x =0

928200- 200000 =0

2000000-1)=928200

=1+0,4641, =1,4641

n=4

***Ответ:4 года.***

***3.2 Вклады.***

Задача №1.

*Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?*

***Решение:***

S=3600 тысяч – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=3 года, х =? – действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | +х | Sb+x |
| 2 год | b(Sb+x)= Sb2+xb | +х | Sb2+xb+x |
| 3 год | b(Sb2+xb+x)=Sb3\_+хb2+xb | Снял вклад |  |

Sb3+хb2+xb = 1,485S

х(b2+b) = 1,485S - Sb3

х(1,21+1,1) = 1,485S – 1,331S

2,31х = 0,154\*3600

2,31х = 554,4

х = 240

***Ответ: 240000.***

Задача №2.

*Василий кладет в банк 1 000 000 рублей под 10% годовых на 4 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года) на счет фиксированную сумму 133 000 рублей. Какая сумма будет на счете у Василия через 4 года? (Решение с помощью формулы суммы геометрической прогрессии)*

***Решение:***

S=1000000 – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=4 года, х =133000 – действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | +х | Sb+x |
| 2 год | b(Sb+x)= Sb2+xb | +х | Sb2+xb+x |
| 3 год | b(Sb2+xb+x)=Sb3\_+хb2+xb | +х | Sb3\_+хb2+xb+х |
| 4 год | b(Sb3\_+хb2+xb+х)= Sb4\_+хb3+xb2+хb | Снял вклад |  |

Sb4\_+хb3+xb2+хb=Sb4\_+хb(b2+b+1)=

***Ответ: 1948353 рублей.***

Задача №3.

*Близнецы Саша и Паша положили в банк по 50 000 рублей на три года под 10% годовых Однако через год и Саша, и Паша сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 20 000 рублей и 15 000 рублей. У кого из братьев к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег? На сколько рублей?*

***Решение:***

S=50000 – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=3 года, х – действие

Саша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | - 0,1Sb | 0,9Sb |
| 2 год | 0,9Sb\*b=0,9Sb2 | -20000 | 0,9Sb2- 20000 |
| 3 год | (0,9Sb2- 20000)\*b = 0,9Sb3\_ 20000b | Снял вклад |  |

0,9Sb3\_ 20000b = 0,9\*50000\*1,331–20000\*1,1 = 59895–22000 = 37895рублей

Паша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | - 0,2Sb | 0,8Sb |
| 2 год | 0,8Sb\*b=0,9Sb2 | -15000 | 0,8Sb2- 15000 |
| 3 год | (0,8Sb2- 15000)\*b = 0,8Sb3\_ 15000b | Снял вклад |  |

0,8Sb3\_ 15000b = 0,8\*50000\*1,331–15000\*1,1 = 53240–16500 = 36740рублей

37895 – 36740 = 1155 рублей

***Ответ: у Саши на 1155 рублей.***

Задача №4.

*Миша и Маша положили в один и тот же банк одинаковые суммы под 10% годовых. Через год сразу после начисления процентов Миша снял со своего счета 5000 рублей, а еще через год снова внес 5000 рублей. Маша, наоборот, через год доложила на свой счет 5000 рублей, а еще через год сразу после начисления процентов сняла со счета 5000 рублей. Кто через три года со времени первоначального вложения получит большую сумму и на сколько рублей?*

***Решение:***

S – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=3 года, х – действие

Миша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | -5000 | Sb - 5000 |
| 2 год | (Sb-5000)\*b=Sb2-5000b | +5000 | Sb2-5000b+5000 |
| 3 год | (Sb2-5000b+5000)\*b = Sb3-5000b2+5000b | Снял вклад |  |

Sb3-5000b2+5000b = 1,331S-5000\*1,21+5000\*1,1=1,331S-6050+5500=1,331S-550

Маша

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | + 5000 | Sb + 5000 |
| 2 год | (Sb+5000)\*b=Sb2+5000b | -5000 | Sb2-5000b-5000 |
| 3 год | (Sb2+5000b-5000)\*b = Sb3+5000b2-5000b | Сняла вклад |  |

Sb3+5000b2-5000b = 1,331S+5000\*1,21-5000\*1,1=1,331S+6050-5500=1,331S+550

***Ответ: у Маши на 1100 рублей.***

Задача №5.

 *Гражданка Васильева вложила 44 млрд. рублей в два оффшорных банка на 3 года: часть денег в банк А, остальное в банк Б. Известно, что банк А ежегодно начисляет 10% годовых; банк Б в первый год начисляет 5% годовых, во второй – 10%, а в третий – 15%. Сколько рублей было вложено в каждый из банков, если через три года доход гражданки Васильевой от вложения денег составил 14 520 млн. рублей.*

***Решение:***

S=44000млн – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты,

b=1+0,01r – коэффициент,

n=3 года

1 банк

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Проценты | Вклад с процентами |
| 0 |  | S |
| 1 год | 10% | 1,1S |
| 2 год | 10% | 1,12S=1,21S |
| 3 год | 10% | 1,13S=1,331S |

2 банк

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Проценты | Вклад с процентами |
| 0 |  | 44000-S |
| 1 год | 5% | 1,05(44-S) |
| 2 год | 10% | 1,05\*1,1S=1,155(44000-S) |
| 3 год | 15% | 1,05\*1,1\*1,15S=1,32825(44000-S) |

1,331S+1,32825(44000-S)-44000=14520

1,331S-1,32825S=14520-58443+44000

0,00275S=77

S=28000 млн=28 млрд положила в 1 банк

44-28=16 положила во 2 банк

***Ответ: 28 млрд и 16 млрд рублей.***

Задача №6.

*1 ноября 2017 года Николай открыл в банке счёт «Управляй», вложив S тысяч рублей (S – целое число) сроком на 4 года под 10% годовых. По договору с банком проценты по вкладу должны начисляться 31 октября каждого последующего года. 1 ноября 2019 года и 1 ноября 2020 года Николай планирует снять со счёта 100 тысяч и 50 тысяч рублей соответственно. 1 ноября 2021 года Николай собирается закрыть счёт в банке и забрать все причитающиеся ему деньги. Найдите наименьшее значение S, при котором доход Николая от вложений в банк за эти 4 года окажется более 70 тысяч рублей.*

***Решение:***

S – сумма вклада

r% - годовые (ежемесячные) проценты, r=10%

b=1+0,01r – коэффициент, b=1,1

n=4 года, х – действие

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Вклад с % | Действие | Вклад после действия. |
| 2017 |  |  | S |
| 2018 | Sb |  | Sb |
| 2019 | Sb2 | -100 | Sb2-100 |
| 2020 | b(Sb2-100)=Sb3\_100b | -50 | Sb3\_100b-50 |
| 2021 | b(Sb3\_100b-50)= Sb4\_100b2-50b | Снял вклад |  |

Sb4\_100b2-50b –S+15070

S(b4\_1)-100b2-50b +15070

S(1,14\_1)70-150+55+121

0,4641S 96

S 206,9

S=207

***Ответ: 207тысяч рублей.***

Задача №7.

*За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом 11  и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма увеличилась на 104 %. Определите срок хранения вклада.*

***Решение:***

S – сумма вклада

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | % | Вклад с % |
| 0 |  | S |
| n | 5%, | 1,05nS |
| m | 12%, | 1,12m 1,05nS |
| k | 11 % | k 1,12m 1,05nS |
| p | 12,5% | 1,125p×k 1,12m 1,05nS |

Пусть n месяцев лежал вклад под 5%, m месяцев – под 12%, k месяцев – под 11 , p месяцев – под 12,5 %.

1,125pk 1,12m 1,05nS = S

1,125p = p = p= =

 k= =

1,12m = m = m= =

1,05n = n = n= =

= =

 = -2n+2m+k-3p=-3 n=1

 = n-2k+2p = -1 m=1

 = -n+k-2m = 0 k=3

 = m+ n = 2 p=2

1+1+3+2 = 7

***Ответ: 7 месяцев.***

Задача №8

*Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?*

***Решение:***

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Стоимость ценной бумаги |
| 0 | 7000 |
| 1 | 7000+2000 |
| 2 | 7000+22000 |
| 3 | 7000+32000 |
| n-1 | 7000+(n-1)2000 |

 На банковском счёте:

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Стоимость ценной бумаги |
| n | b(7000+(n-1)2000) |
| n+1 | 7000+(n-1)2000) |
| 15 | 7000+(n-1)2000) |

Чтобы сумма на банковском счёте была наибольшей необходимо, чтобы процент (r) от стоимости ценной бумаги в n-ом году был больше, чем 2000 рублей

|  |
| --- |
| r(7000+(n-1)2000)20000,1(7000+2000n-2000)2000500+200n2000200nnn=8***Ответ: 8 года.*** |

***3.3 Задачи на оптимизацию.***

Задача №1.

*У фермера есть два поля, каждое площадью 100 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?*

***Решение:***

Вся площадь: 100 га

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 поле | Урожайность | Площадь | Полный урожай | Цена за центнер | Полный доход |
| Картофель | 400  | x | 400x | 10000 | 4000000x |
| Свекла | 300 | kx | 300kx | 11000 | 3300000kx |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,k) = 4000000x+3300000kx→наиб

Заметим, что x+kx=100, т.е. x= где k

∑(k) = +→наиб

∑(k) = →наиб

Возьмём производную этой функции

 = =

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при k=0. Это означает, что всё первое поле нужно засадить картофелем, при этом доход будет 4000000рублей

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 поле | Урожайность | Площадь | Полный урожай | Цена за центнер | Полный доход |
| Картофель | 300 |  |  | 10000 |  |
| Свекла | 400 |  |  | 11000 |  |

Из второй таблицы видно, что свекла имеет, как большую урожайность, так и большую цену за центнер, следовательно, второе поле нужно засадить свеклой. При этом доход будет 40011000рублей

Полный доход составляет 400 млн + 440 млн = 840 млн рублей.

***Ответ: 840 млн рублей.***

Задача №2.

*У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га. Фермер может продать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?*

Вся площадь: 10 га

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 поле | Урожайность | Площадь | Полный урожай | Цена за центнер | Полный доход |
| Картофель | 500  | x | 500x | 5000 | 2500000x |
| Свекла | 300 | kx | 300kx | 8000 | 2400000kx |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,k) = 2500000x+2400000kx→наиб

Заметим, что x+kx=10, т.е. x= где k

∑(k) = +→наиб

∑(k) = →наиб

Возьмём производную этой функции

 = =

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при k=0. Это означает, что всё первое поле нужно засадить картофелем, при этом доход будет 2500000рублей

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 поле | Урожайность | Площадь | Полный урожай | Цена за центнер | Полный доход |
| Картофель | 300 |  |  | 5000 |  |
| Свекла | 500 |  |  | 8000 |  |

Из второй таблицы видно, что свекла имеет, как большую урожайность, так и большую цену за центнер, следовательно, второе поле нужно засадить свеклой. При этом доход будет 5008000рублей

Полный доход составляет 25 млн + 40 млн = 65 млн рублей.

***Ответ: 65 млн рублей.***

Задача №3.

*Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?*

***Решение:***

Общая площадь: 981

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Площадь одного номера | Кол-во номеров | Полная площадь | Цена за один номер | Полный доход |
| Стандартные номера | 27  | x | 27x | 2000 | 2000x |
| Люкс | 45 | y | 45y | 4000 | 4000y |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,y) = 2000x+4000y→наиб

Заметим, что 27x+45y981, т.е. x где y , т.е. y

∑(y) = +4000y→наиб

∑(y) = →наиб

Возьмём производную этой функции

 =

Значит функция возрастает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=21. Это означает, что номеров люкс будет 21. Проверим общую площадь: 45ер. При этом полный доход будет рублей.

***Ответ: 86000 рублей.***

Задача №4.

*Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в стуки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?*

***Решение:*** Общая площадь : 940

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Площадь одного номера | Кол-во номеров | Полная площадь | Цена за один номер | Полный доход |
| Стандартные номера | 30  | x | 30x | 4000 | 4000x |
| Люкс | 40 | y | 40y | 5000 | 5000y |

Составим функцию полного дохода:

∑(x,y) = 4000x+5000y→наиб

Заметим, что 30x+40y940, т.е. x где y , т.е. y

∑(y) = +5000y→наиб

∑(y) = →наиб

Возьмём производную этой функции

 =

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=0. Это означает, что стандартных номеров будет 940. Проверим общую площадь: 30ер на номер люкс. При этом полный доход будет рублей.

***Ответ: 125000 рублей.***

Задача №5.

*Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?*

***Решение:*** Оплата труда в неделю : 900000рублей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | x2 | x | 250 | 250 |
| 2 завод | y2 | y | 200 | 200 |

Составим функцию количества единиц товара:

∑(x,y) = x+y→наиб

Заметим, что 250+200900000, т.е. x где y

∑(y) = +y→наиб

Возьмём производную этой функции

 = +1 =

Найдём нули производной: =0

 =0

0,64=(3600-)

1,44=3600

y=50

Функция принимает своё наибольшее значение при y=50 (точка максимума).

x==40

Найдём количество единиц товара : +50 = 90

***Ответ: 90 единиц товара.***

Задача №6.

*Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 3t единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 4t единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?*

***Решение:*** Оплата труда в неделю: 5000000рублей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | x2 | 3x | 500 | 500 |
| 2 завод | y2 | 4y | 500 | 500 |

Составим функцию количества единиц товара:

∑(x,y) = 3x+4y→наиб

Заметим, что 500+5005000000, т.е. x где y

∑(y) =3 +4y→наиб

Возьмём производную этой функции

 = 3+4 =

Найдём нули производной: =0

 =0

9=16(10000-)

25=1600000

y=80

Функция принимает своё наибольшее значение при y=80 (точка максимума).

x==60

Найдём количество единиц товара: 3+480 = 180+320 = 500

***Ответ: 500 единиц товара.***

Задача №7.

*Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t 2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?*

***Решение:*** 70 единиц товара

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | x2 | x | 500 | 500 |
| 2 завод | y2 | y | 200 | 200 |

Составим функцию еженедельной оплаты труда:

∑(x,y) = 500→наим

Заметим, что x+y70, т.е. x где y

∑(y) =500→ наим

∑(y) =500 =700-70000y+2450000

Возьмём производную этой функции

 = 1400y-70000

Найдём нули производной: 1400y-70000=0

 y=50

Функция принимает своё наименьшее значение при y=50 (точка минимума).

x

Найдём еженедельную оплату труда: +200 = 500+200500000=700000

***Ответ: 700 тысяч рублей .***

Задача №8.

 *Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном в первом городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  3t2 часов в неделю, то за эту неделю они производят  t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно 4t2 часов в неделю, они производят  t приборов. За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 1 тысячу руб. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?*

***Решение:*** 30 единиц товара

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Часы в неделю | Единицы товара в неделю | Оплата за 1 час | Полная оплата |
| 1 завод | 3x2 | x | 1000 | 3000 |
| 2 завод | 4y2 | y | 1000 | 4000 |

Составим функцию еженедельной оплаты труда:

∑(x,y) = 3000→наим

Заметим, что x+y30, т.е. x где y

∑(y) =3000→наим

∑(y) =3000 =7000-180000y+2700000

Возьмём производную этой функции

 = 14000y-180000

Найдём нули производной: 14000y-180000=0

 y ==12

Функция принимает своё наименьшее значение при y=12 (точка минимума).

Пусть y=12, тогда x=18

Найдём еженедельную оплату труда: +400 = 3000+4000000=1548000

Пусть y=13, тогда x=17

Найдём еженедельную оплату труда: +400 = 30004000000=1543000

***Ответ: 1543000 рублей .***

Задача №9.

*В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x2 человеко-часов труда, а для добычи у кг никеля в день требуется у2 человеко-часов труда.*

*Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?*

***Решение:***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 область | Количество рабочих | Часы в сутки | Количество за 1 час | Полное количество |
| алюминий | x | 5 | 0,1 | 0,5x |
| никель | y | 5 | 0,1 | 0,5y |

Из таблицы видно, что в первой области совершенно одинаковые условия добывания алюминия и никеля. Это означает, что в первой области алюминия и никеля будут добывать поровну по = 40 кг. Всего 80 кг.

Во второй области: x2 +y2=160

x2 +y2=800

x=20, y=20. Всего 40 кг.

***Ответ: 120кг.***

Задача №10.

*В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.*

*Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?*

***Решение:*** 60 человек по 5 часов в день

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 область | Количество рабочих | Часы в сутки | Количество за 1 час | Полное количество |
| алюминий | x | 5 | 2 | 10x |
| никель | 60-x | 5 | 3 | 15(60-x) |

 260 человек по 5 часов в день

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 область | Количество рабочих | Часы в сутки | Количество за 1 час | Полное количество |
| алюминий | y | 5 | 3 | 15y |
| никель | 260-y | 5 | 2 | 10(260-y) |

Получаем, что всего алюминия производят 10x+15y

 никеля: 15(60-x)+ 10(260-y)=3500-15x-10y

Так как для сплава необходимо , чтобы на2 кг алюминия приходился 1 кг никеля, то: 10x+15y=2(3500-15x-10y)

10x+15y=7000-30x-20y

40x=7000-35y

x = =

Составим функцию массы сплава:

∑(x,y) = 10x+15y +3500-15x-10y →наиб

∑(x,y) = 3500-5x+5y →наиб

∑(y) = 3500-5 +5y →наиб

∑(y) = 3500-5 +5y →наиб

∑(y) = →наиб

Возьмём производную этой функции

 =

Значит функция возрастает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при наибольшем значении y.

Так как x = то 1400-7y0 , y.

Проверим значение у=200, тогда x=0.

Масса сплава: 3500-5+5=4500

***Ответ: 4500 кг.***

Задача №11.

*Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид начинки | Себестоимость(за 1 тонну) | Отпускная цена(за 1 тонну) | Производственныевозможности |
| ягоды | 70 тыс. руб. | 100 тыс. руб. | 90 (тонн в мес.) |
| творог | 100 тыс. руб. | 135 тыс. руб. | 75 (тонн в мес.) |

*Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц*

 ***Решение***

Пусть x тонн выпускает фабрика блинчиков с ягодами, а y тонн – с творогом. Тогда по условию имеем : x

Составим функцию прибыли:

∑(x,y) = 30x+35y→наиб

Пусть производственная возможность равна 1, тогда + = 1

75x + 90y = 6750

x = 90 – 1,2y

∑(y) = 30(90 – 1,2y)+35y→наиб

∑(y) = 2700 - y→наиб

Возьмём производную этой функции

 =

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=15. Тогда x = 90-1,2

При этом максимальная прибыль будет рублей.

***Ответ: 2685000 рублей.***

Задача №12.

*Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вид тары** | **Себестоимость,1 ц.** | **Отпускная цена,1 ц.** |
| стеклянная | 1500 руб. | 2100 руб. |
| жестяная | 1100 руб. | 1750 руб. |

*Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).*

***Решение***

Пусть x центнеров выпускает фабрика в стеклянной таре, а y центнеров – в жестяной. Тогда по условию имеем : x

Составим функцию прибыли:

∑(x,y) = 600x+650y→наиб

Пусть производственная возможность равна 1, тогда + = 1

80x + 90y = 7200

x = 90 – 1,125y

∑(y) = 600(90 – 1,125y)+650y→наиб

∑(y) = 54000 - 25y→наиб

Возьмём производную этой функции

 =

Значит функция убывает во всей области определения, т.е. принимает своё наибольшее значение при y=20. Тогда x = 90-1,12

При этом максимальная прибыль будет рублей.

***Ответ: 53500 рублей.***

***3.4 Нестандартные задачи***

Задача №1.

*Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?*

***Решение:***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Скорость | Время | Расстояние |
| 1 велосипедист | 40 | t | 40t |
| 2 велосипедист | 30 | t | 30t |

Составим функцию квадрата расстояния между велосипедистами:

∑(t) = →наим, где t

∑(t) = 25-400t+1600→наим

∑(t) = 2500→наим

Возьмём производную этой функции

 = 5000t-580

Найдём нули производной: 5000t-580=0

 t ===

Функция принимает своё наименьшее значение при t= ч = 60(точка минимума).

Найдём расстояние между велосипедистами: = = === 0,6

***Ответ: 0,6км, 6,96 минут .***

Задача №2 .

*Бриллиант массой 20 карат был разбит на две части после чего его стоимость уменьшилась на 25,5%.а) Найдите массы частей на которые был разбит бриллиант если известно, что цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы.б) На какое максимальное число процентов может уменьшиться цена бриллианта разбитого на две части.*

***Решение:***

M=20 карат, S- стоимость бриллианта

S=km,S1=km1,S2=km2

Пусть m=x, тогда m=20-x

1. S1+S2=0,745S

kx2+k(20-x)2=0,745k202

x2+(20-x)2=298

x2+400-40x+102=0

x2-20x+51=0

x1=17, x2=3

***Ответ: массы частей 17 и 3 карат.***

1. Цена бриллианта максимально снизится, если обе части будут по 10 карат

S1+S2=aS

k102+k102=a202k

100+100=a400

a=200/400=0,5

***Ответ: на 50%***

Задача №3

*В одной стране в обращении находились 1000000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая нехорошая структура стала ввозить в страну по 100000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это время другая структура стала вывозить из страны 50000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказались фальшивыми. Через сколько месяцев содержания фальшивых долларов в стране составит 5%?*

***Решение:***

n - количество месяцев

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Было | Стали ввозить | Стали вывозить | Всего стало |
| Всего | 1000000 | 100000n | 50000n | 1000000+50000n |
| Фальшивые | 200000 | 10000n | 15000n | 200000-5000n |

200000-5000n =0,05(1000000+50000n )

200000-5000n =50000+2500n

-7500n = -150000

n=20

***Ответ: 20 месяцев***

Задача №4

 *Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 рублей. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 рублей. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй – 80%. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% больше суммы первого. На сколько процентов возросла цена одной акции?*

***Решение:***

k- первоначальная цена 1 акции

x – штук купил первый брокер

y – штук купил второй

z – конечная цена 1 акции

Составим систему уравнений:

3)

y = = 2,25x

1. k(x+y)=3640

k(x+2.25x)=3640

k = = =

1. z(0,75x+0,8y)=3927

z(0,75х+1,8x)=3927

z2,55x=3927

z= = =

4) Найдём, на сколько процентов возросла цена одной акции

k = - 100%

z = - a%

a= 137,5%

***Ответ: на 37,5%***

Задача №5.

*Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x2+x+9 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит*

*px-(0,5 x2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?*

***Решение***

Составим функцию прибыли:

∑(x,p) =px-(0,5 x2+x+9)→наиб

∑(x,p) =px-0,5 x2-x-9

Возьмём производную этой функции

 = p-x-1

Найдём нули производной: p-x-1=0

x = p-1

Функция принимает своё наибольшее значение при x = p-1(точка минимума).

Найдём прибыль:

∑(p) =p(p-1)-0,5 (p-1)2-(p-1)-9 = 0,5p2-p-8,5

По условию строительство завода должно окупиться не более, чем за 5 лет. То есть за 5 лет прибыль должна быть не меньше 115 млн рублей.

5(0,5p2-p-8,5115

0,5p2-p-8,5-23=0

p2-2p-63=0

p1=9, p2=-7

***Ответ: 9 тысяч рублей.***

**4.Заключение**

В данной работе рассмотрены основные методы решения задач на кредит, вклады и оптимизацию. Тема работы очень актуальна, так как все рассматриваемые задачи взяты из материалов по подготовке к ЕГЭ по математике «Профиль». Надеюсь, что данная работа будет полезна учащимся 10-11 класса, а также преподавателям математики.

**5.Список использованной литературы:**

1. ЕГЭ 2018 под редакцией А. Л. Семенова, И.В. Ященко

2. Открытый банк заданий ЕГЭ fipi.ru

3. Сайт «Решу ЕГЭ»

4. Сайт «Алекс Ларин»