Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение "Лицей №14 имени Заслуженного учителя Российской Федерации А. М. Кузьмина"

**Исследовательская работа**

**«Финансовая математика в задачах ЕГЭ»**

Автор работы:

*ученик 11 класса А*

*Матвей Г.*

Научный руководитель:

*Бурмистрова А.В.,*

*учитель математики*

**Тамбов, 2020**

ОГЛАВЛЕНИЕ

[1. ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc27774848)

[1.1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ 4](#_Toc27774849)

[1.2 ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ 5](#_Toc27774850)

[2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ 6](#_Toc27774851)

[2.1 ЗАДАЧИ НА БАНКОВСКИЕ ВКЛАДЫ 6](#_Toc27774852)

[2.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ 12](#_Toc27774853)

[2.3 НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЕГЭ 15](#_Toc27774854)

[3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 34](#_Toc27774855)

[4. ЛИТЕРАТУРА 35](#_Toc27774856)

# 1. ВВЕДЕНИЕ

В данном проекте «Финансовая математика в задачах ЕГЭ» разработаны алгоритмы решения задач №17 ЕГЭ на банковские вклады, кредиты и проценты. Задачи выбраны из Открытого банка заданий. Подбор задач:

а) на банковские вклады;

б) выплата банковских кредитов по различным схемам;

в) выбор более выгодных условий кредитования.

Эти задачи имеют прямое отношение к нашей российской экономике, это задачи про вклады, проценты и кредиты. Именно задачи с процентами с недавних пор добавлены во вторую часть единого государственного экзамена по математике под номером 17. За решение этой задачи согласно спецификациям ЕГЭ предлагается сразу три первичных балла, т. е. экзаменаторы считают эту задачу одной из самых сложных. Вместе с тем, для решения любой из указанных задач из ЕГЭ по математике, необходимо знать всего лишь две формулы, каждая из которых вполне доступна любому школьному выпускнику. Это формулы суммы арифметической и геометрической прогрессии.

Поэтому в данном проекте представлены алгоритмы решения данных задач, выведены универсальные формулы.

Но сначала, конечно, мы попробуем разобраться в банковских терминах и схемах, необходимых для решения задач. А именно, в схемах начисления процентов по банковским вкладам.

### 1.1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

**Актуальность**. В программу старших классов по математике тема «Проценты» не входит, навыки работы с процентами забываются. ЕГЭ по математике содержит задачи экономического содержания на проценты, которые решаются с помощью простых и сложных процентов. Проанализировав сборники заданий по подготовке к ЕГЭ, я пришел к выводу, что мне необходимо в совершенстве научиться решать задачи на проценты, чтобы сдать ЕГЭ по математике на максимально допустимый балл.

**Цель**: обобщение, углубление и систематизация знаний по теме «Проценты», решение экономических задач на сложные и простые проценты.

Для решения данной цели я поставил перед собой **ряд задач:**

* Изучить теоретический материал по выбранной теме.
* Ознакомиться с историей возникновения простых и сложных процентов.
* Вывести формулы начисления простых и сложных процентов.
* Подобрать задачи из сборников по подготовке к ЕГЭ и олимпиадам, решаемые по формулам простых и сложных процентов.
* Научиться решать задачи с процентами разных видов сложности.

### 1.2 ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ

Слово «процент» происходит от латинского pro centum – начисление на сотню. В дальнейшем для сокращения писали Р/С, а затем эта запись перешла в знакомое нам начертание %. Таким образом, один процент – это сотая часть числа. Например, от числа составляют 

Процентами очень удобно пользоваться на практике, так как они выражают части целых чисел в одних и тех же сотых долях. Это даёт возможность упрощать расчеты и легко сравнивать части между собой и с целыми. Проценты появились ещё в древности у вавилонян, которые пользовались шестидесятеричными дробями. Уже в клинописных табличках вавилонян содержались задачи на расчёт процентов.

Были известны проценты и в Индии. Индийские математики вычисляли проценты, применяя так называемое тройное правило, т.е. пользуясь пропорцией. Они умели производить и более сложные вычисления с применением процентов.

Наибольшую популярность проценты приобрели в банковской сфере. Слово «банк» ведёт своё происхождение от латинского banco – скамья, лавка менялы. Первые менялы появились ещё до нашей эры, когда у многих народов широко распространился обычай одолжения денег под рост, то есть с обязательством возврата не только долга, но и вознаграждения за труды. Прообразом современных банковских учреждений стали банки, основанные в Венеции в 1171 году. В России аналогичные банки появились в 1774 году. Они давали деньги в долг королям, купцам, ремесленникам, финансировали дальние путешествия, строительство крупных сооружений и т.п. Как и менялы в древности, банки брали плату за пользование предоставленными деньгами. Эта плата традиционно выражается в виде процентов к величине, выданной в долг суммы денег.

# 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 2.1 ЗАДАЧИ НА БАНКОВСКИЕ ВКЛАДЫ

**Схема 1 - платеж равными взносами**

Пусть в банке планируется взять кредит в банке на некоторую сумму *S*. Условия его возврата таковы:

— в начале года долг увеличивается на по сравнению с концом прошлого года;

— до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найти общую сумму платежей, внесенных клиентом, после погашения кредита, если все ежегодные платежи равны между собой.

**Решение:**

Пусть – вносимый ежегодный платёж, – долг клиента банку конец -го года. Тогда – его долг банку в начале -го года или , где .

Получаем цепочку равенств:

,

Получаем уравнение . Отсюда и общая сумма выплат равна

**Пример 1.** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на156060 рублей?

**Решение:**

Пусть руб. – сумма кредита, руб. – размер ежегодного платежа. Тогда общая сумма выплат после полного погашения кредита через года равна руб. Так как, то. Выводим формулу. Из уравнения

Получаем . Отсюда руб.

Ответ.239 400 руб.

**Пример 2.** В июле пла­ни­ру­ет­ся взять кре­дит в банке на не­ко­то­рую сумму. Усло­вия его воз­вра­та та­ко­вы:

— каж­дый ян­варь долг воз­рас­та­ет на 31% по срав­не­нию с кон­цом преды­ду­ще­го года;

— с фев­ра­ля по июнь каж­до­го года не­об­хо­ди­мо вы­пла­тить часть долга, рав­ную 69 690 821 рубль.

Сколь­ко руб­лей было взято в банке, если из­вест­но, что он был пол­но­стью по­га­шен тремя рав­ны­ми пла­те­жа­ми (то есть за три года)?

**Решение:**

Если искомая сумма составляет рублей, то при коэффициенте ежегодной процентной ставки , равной , фиксированная сумма , которую клиент ежегодно должен возвращать в банк в течение 3 лет, составляет , откуда .

Заметим, что кратно . Действительно, ;

Ответ.124 809 100 руб.

**Схема 2 – уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину**

Пусть в банке планируется взять кредит на некоторую сумму . Условия его возврата таковы:

— вначале года долг увеличивается на по сравнению с концом прошлого года;

— до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— после внесения платежа каждый год долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего года.

Найти общую сумму внесенных платежей после погашения кредита.

**Решение:**

Пусть и – соответственно вносимый платеж и долг клиента банку на конец -го года. Тогда – его долг банку в начале -го года или , где . В соответствии с условием задачи долг ежегодно уменьшается на величину равную , тогда .

В соответствии с условием задачи получаем цепочку равенств:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Суммируя все выплаты, получаем .

Получаем формулу

**Пример 1.** В июле планируется взять в кредит в банке на сумму 5 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн. рублей?

**Решение:**

Пусть – количество лет, на которое берется кредит млн. руб., – величины в рублях платежей в первый, второй, …, -й годы. Общая сумма выплат после полного погашения кредита равна млн. руб. Так как, то . Выводим формулу . Из уравнения получаем .

Ответ.4 года

**Пример 2.** 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

**Решение:**

Пусть начальная сумма кредита равна , тогда переплата за первый месяц равна . По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной , и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

, , …, ,

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдем полную переплату по кредиту:

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы взятой в кредит, тогда:

.

Ответ.3

**Пример 3.** Александр Сергеевич взял ипотечный кредит суммой 2 млн. рублей на 20 лет. Условия выплаты кредита таковы:

— в начале каждого года долг увеличивается на 10%;

— после начисления процентов выплачивается некоторая часть долга;

— после выплаты долг должен быть на одну и ту же величину меньше, чем в аналогичном периоде прошлого года.

После 8-й выплаты Александру Сергеевичу удалось произвести реструктуризацию кредита, в результате чего процент, начисляемый в последующие годы, уменьшился до 8 %. Какую сумму сэкономил Александр Сергеевич?

**Решение:**

Ежегодно долг должен уменьшаться равномерно на сумму рублей. Значит, после восьмой выплаты долг будет равен:

тыс. рублей.

После реструктуризации кредита экономия (в тыс. рублей) составит:

тыс. рублей

Ответ.156 000 руб.

### 2.2 ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Достаточно часто в вариантах ЕГЭ и диагностических работах стали появляться экономические задачи на оптимизацию. Как правило, решение таких задач сводится к исследованию функции, нахождению точек экстремума и наибольшего (наименьшего) значения функции. Для этого сначала составляется, как принято говорить, математическая модель задачи. Здесь часто успех решения зависит от разумного выбора независимой переменной. Затем выявляют оптимизирующую величину (т.е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти) и, записав функцию, связывающую независимую переменную с оптимизирующей величиной, исследуют её. Чаще всего это делается с помощью производной. Ниже приведены задачи, которые можно использовать для подготовки к ЕГЭ (задание 17).

**Пример 1.** Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно часов в неделю, то за эту неделю они производят единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Владимир платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе –300рублей.

Владимир готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

**Решение (с использованием производной):**

Допустим, что на заводе в первом городе рабочие трудятся часов, а на заводе во втором городе часов. Тогда в неделю будет произведено единиц товара при затратах на оплату труда рублей.

Найдем наибольшее значение выражения при условии . Выразив отсюда , получим .

Нужно найти наибольшее значение функции на отрезке .

при .

Из уравнения получаем

.

Точки – единственная критическая точка функции на отрезке . Сравнивая значения , , , получаем, что наибольшее значение функции равно 80, а значит и наибольшее количество единиц товара равно 80

Ответ. 80

**Решение (введение параметра):**

Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся часов, а на заводе во втором городе часов. Тогда в неделю будет произведено единиц товара при затратах на оплату труда рублей.

Требуется найти наибольшее значение параметра , где , при выполнении условий (\*), и .

Выразив , и, подставив в (\*) , получим квадратное уравнение

.

Задача сводится к нахождению наибольшего неотрицательного значения параметра, при котором это уравнение имеет решение и, кроме того, получается . Квадратное уравнение имеет решение, если

.

При получаем и . Значит, наибольшее количество единиц товара равно 80

Ответ. 80

**Пример 2.** Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме Гб входящей в него информации выходит , а с сервера №2 при объёме Гб входящей в него информации выходит Гб обработанной информации; . Каков набольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гб?

**Решение:**

Пусть на сервере №1 обрабатывается , а на сервере №2 обрабатывается Гб из всей первичной информации. Тогда , а обработано будет Гб информации. Выразим через : .

Требуется найти наибольшее значение функции

, , , .

Поэтому единственная критическая точка и . Условия , выполнены. Если , то , и . Если , то . Поэтому есть точка максимума. Значит, .

Ответ.1682 Гб.

### 2.3 НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЕГЭ

Рассмотрим методы решения некоторых задач ЕГЭ (задание 17).

**Задача 1.**

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн. рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца, где *r* – целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| Долг (в млн. рублей) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение *r*, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн. рублей

**Решение:**

По условию, долг перед банком (в млн. рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.

Пусть , тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5.

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

; ; ; ; ; .

Общая сумма выплат составляет:

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн. рублей, значит,

; ;

Ответ. 5

**Задача 2.**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн. рублей?

**Решение:**

Пусть сумма кредита равна , где – искомое количество лет. Составим таблицу кредитной истории

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Годы | Долг в июле (млн. руб.) – без учёта процентной ставки | Долг в январе (млн. руб.) – без учёта погашения части кредита | Выплачено с февраля по июнь (млн. руб.) | Долг в июле (млн. руб.) с учётом погашения части кредита |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| … | … | … | … | … |
| 9 |  |  |  | 0 |

Ответ.8 лет

**Задача 3.**

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят тыс. рублей в конце года . В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого года сумма на счете будет увеличиваться в раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце тридцатого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце третьего года. При каких положительных значениях это возможно?

**Решение (1-ый способ):**

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года, , то в конце двадцать пятого года на его счете будет тыс. рублей. Сравним и :

Рассмотрим непрерывную функцию . Если , то , и если , то .

График функции – парабола, ветви которой направлены вниз. Так как , то если для некоторого натурального числа выполнено условие , то для любого выполнено условие . Следовательно, ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года при выполнении условий и , то есть

.

Ответ.

**Решение (2-ой способ):**

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года , то в конце двадцать пятого года на его счете будет тыс. рублей. Рассмотрим функцию , зависящую от действительной переменной x на отрезке . Числа последовательности , совпадают со значениями функции при .

Функция непрерывна на и , .

.

при или . Причем при и при , то есть (единственный).

В условии сказано, что ценные бумаги выгодно продавать в конце 21-го года. Значит, максимум функции находится на интервале и для последовательности должны выполняться условия

Отсюда

Ответ.

**Задача 4.**

По вкладу ≪А≫ банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу ≪Б≫ увеличивает эту сумму на 21% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу ≪Б≫, при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада ≪А≫.

**Решение:**

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма . На вкладе ≪А≫ каждый год сумма увеличивается на 20%, т.е. умножается на коэффициент 1,2. Тогда через три года сумма на вкладе ≪А≫ равна . Аналогично на вкладе ≪Б≫ сумма через три года будет равна

*,* где – натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее целое число решение неравенства

Ответ.19

**Задача 5.**

В августе 2017 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на *r*%;

— с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 38 016 рублей, или за два года равными платежами по 52 416 рублей. Найдите *r*.

**Решение:**

Пусть сумма кредита , ежегодные выплата , . По условию долг на июль меняется так:

*,, ,,*

Если долг выплачен двумя равными платежами , то

Если долг выплачен тремя равными платежами , то

Подставим в это уравнение выражение для , получаем:

По условию , a , тогда:

Отсюда получаем для :

Отсюда получаем посторонний корень и корень , а, следовательно, .

Ответ.20

**Задача 6.**

Сергей мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн руб. Сергей может купить её в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Сергею придётся 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придётся выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого Сергей может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды—14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съёмную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Сергей сможет накопить на квартиру, если считать, что её стоимость не изменится?

**Решение:**

Пусть Вася купил квартиру в кредит. Тогда он должен погасить кредит за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Сумма, которую он должен выплатить банку, по условию на 260% превышает исходные 2 млн. руб., то есть, равна 2000 · 3, 6 = 7200 тыс. руб. Разделив эту сумму на 240, получаем ежемесячный платеж, равный 30 тыс. руб.

Далее, если вместо этого Вася снимал квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 16 тыс. руб. Поскольку 2000: 16 = 125 месяцев то есть за 10 лет и 5 месяцев.

Ответ.125 месяцев

**Задача 7.**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на (*n* + 1) месяц. Условия его возврата таковы:

—1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца;

—cо 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

—15-го числа каждого месяца с 1-го по *n*-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

—15-го числа *n*-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

—к 15-му числу (*n* + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите *r*, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

**Решение:**

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1000, 960, 920, … , 240, 200, 0.

Значит, .

Первого числа каждого месяца долг возрастает на . Пусть , тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

, , … , .

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

, , … , , .

Всего следует выплатить

(тыс. рублей).

Тогда , откуда , и следовательно, , то есть .

Ответ.3

**Задача 8.**

В июле 2017 года планируется взять кредит в банке в размере *S* тыс. рублей (где *S*—натуральное число) сроком на 3 года. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.



Найдите наименьшее значение *S*, при котором каждая из выплат будет составлять **целое** число тысяч рублей.

**Решение:**

Долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль каждого года должен уменьшиться до нуля следующим образом:

*; ; ;* .

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 17,5%, значит, долг в январе каждого года равен:

; ; .

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

*; ; .*

По условию, числа

; ; ;

должны быть целыми. Значит, число должно делиться на 40, 400 и 100. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 400.

Ответ.400

**Задача 9.**

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом

поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

**Решение:**

Продавать свеклу более выгодно, поэтому второе поле, где ее урожайность выше, следует засадить только свеклой. Она принесет доход 10 га · 400 ц/га · 11 000 руб./ц = 44 млн руб.

На первом поле урожайность свеклы составляет 300/400 = 0,75 урожайности картофеля, а стоимость свеклы составляет 11 000/10 000 = 1,1 стоимости картофеля. Произведение этих показателей меньше 1, поэтому выращивать картофель выгоднее: потери от меньшей стоимости компенсируются более высокой урожайностью. Следовательно, все поле следует засеять картофелем, он принесет доход 10 га · 400 ц/га · 10 000 руб./ц = 40 млн руб.

Тем самым, наибольший возможный доход фермера равен 84 млн руб.

Ответ.84 млн. рублей

**Задача 10.**

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 26 человек.

Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на первом объекте работает человек, то их суточная зарплата составляет д. е. Если на втором объектеработает человек, то их суточная зарплата составляет д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 4 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 3 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

**Решение:**

Если на строительство первого дома отправить рабочих, а на строительство второго , то суммарные затраты по условию составят

Это квадратный трехчлен, принимающий наименьшее значение при , поэтому наименьшее значение среди целых точек будет при или . Поскольку 15 ближе к надо брать его. Для получаем

денежных единиц.

Ответ.15 на первый дом и 11 на второй, 1252 денежные единицы

**Задача 11.**

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид начинки | Себестоимость (за 1 тонну) | Отпускная цена (за 1 тонну) | Производственные возможности |
| Ягоды | 70 тыс. руб. | 100 тыс. руб. | 90 (тонн в мес.) |
| Творог | 100 тыс. руб. | 135 тыс. руб. | 75 (тонн в мес.) |

Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

**Решение:**

Пусть – доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а – доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда , при этом блинчиков с ягодной начинкой производится тонн, а с творожной начинкой - тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что откуда , а , откуда . Прибыли завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна при выполнении следующих условий:

Подставляя в выражение , получаем: . Наибольшее значение этого выражения при условии достигается при , тогда .

Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

тыс. руб.

При этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ.2685 тыс. руб.

**Задача 12.**

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера ≪люкс≫ площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4 000 рублей в сутки, а номер ≪люкс≫—5 000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

**Решение:**

Пусть в отеле будет номеров площадью 30 кв. м. и номеров площадью 40 кв. м. Тогда или (\*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна или . Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы . Пусть , тогда , откуда подставляя в (\*), получаем:

В случае точного равенства наибольшему значению суммы соответствовало бы наименьшее значение величины . В случае строгого неравенства необходимо найти наименьшее возможное значение и проверить большие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наименьшее возможное значение равно 0. Поскольку , в гостинице можно открыть 31 стандартный номер и не открывать номера люкс. В этом случае номера будут приносить предпринимателю доход руб. в сутки, и при этом останется 10 кв. м. незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество стандартных номеров. Если в гостинице 30 стандартных номеров и 1 люкс, незанятого пространства не остается: . В этом случае доход будет равен руб. Дальнейшее уменьшение количества стандартных номеров в пользу люксов приведет к уменьшению прибыли.

Ответ.125 000 руб.

**Задача 13.**

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи кг алюминия в день требуется человеко-часов труда, а для добычи кг никеля в день требуется человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

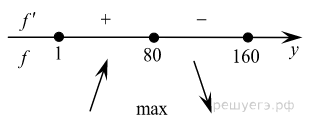
**Решение:**

Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, и необходимо произвести наибольшее количество металла, все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают рабочих, а никель - рабочих. Тогда за сутки они добудут кг алюминия и кг никеля. Найдем наибольшее значение функции

для натуральных , не больших 160. Имеем:

Найдем нули производной:



При меньших 80 производная положительна, а при больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума , равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 – на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.

Ответ.280 кг

**Задача 14.**

Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270 200 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

**Решение:**

Пусть рублей – величина кредита, а (руб.) – первый платеж Дмитрия. Тогда оставшиеся два платежа составляли и рублей соответственно.

В конце первого года долг Дмитрия после его платежа составлял руб.; в конце второго года - руб., а в конце третьего - руб., что составило 0 рублей, так как за три года кредит был погашен полностью. Далее имеем:

Подставляя в это выражение , получаем рублей.

Ответ.26 620 рублей.

**Задача 15.**

В регионе *A* среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43 740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе *B* среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60 000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона *B* увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на *m*% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах *A* и *B* стал одинаковым. Найдите *m*.

**Решение:**

Пусть в регионе *B* проживало *n* человек. Составим таблицу изменения среднемесячного дохода на душу населения по данным задачи.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2014** | **2015** | **2016** | **2017** |
| **Регион *А*** |  | | | |
| Среднемесячный доход на душу населения |  |  |  |  |
| **Регион *B*** |  | | | |
| Суммарный доход жителей |  |  |  |  |
| Число жителей |  |  |  |  |
| Среднемесячный доход на душу населения | 60000 |  |  |  |

По условию , откуда

Следовательно, , откуда . Тем самым, население региона *B* росло на 4% в год.

Ответ.4

**Задача 16.**

Зависимость количества (в шт., ) купленного у фирмы товара от цены (в руб. за шт.) выражается формулой . Затраты на производство единиц товара составляют рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог рублей с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

**Решение:**

Поскольку , прибыль фирмы составляет:

Эта величина является квадратичной функцией от , а её максимум достигается при . Значит, общая сумма налогов, собранных государством, будет равна рублей. Эта величина является квадратичной функцией от , а её максимум достигается при .

Ответ.6000

**Пример 17.**

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.

**Решение:**

Обозначим буквой время, прошедшее с начального момента времени. Поскольку каждый велосипедист движется по взаимно перпендикулярным дорогам, то расстояние между ними может быть вычислено по теореме Пифагора. Рассмотрим – квадрат длины в каждый момент времени, тогда:

.

Итак, , . У данной квадратичной функции есть наименьшее значение, которое достигается при . Найдем его:

.

Таким образом, минимальное расстояние между велосипедистами равно км, и будет достигнуто через мин.

Ответ. мин, км.

**Пример 18.**

Баржу грузоподъёмностью 180 тонн используют для перевозки контейнеров типов А и В. По условиям договора количество перевозимых контейнеров типа А должно составлять не более 75% количества перевозимых контейнеров типа В. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 3 тонны и 3 млн руб., контейнера типа В — 7 тонн и 5 млн руб. соответственно. Найдите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, которые можно перевезти при данных условиях. Укажите число контейнеров типа А и число контейнеров типа В, которые нужно перевезти для получения наибольшей возможной суммарной стоимости.

**Решение:**

Допустим, мы погрузим контейнеров типа A и контейнеров типа B. По условию и , поэтому , откуда . Значит, . Если , то из второго условия, это дает выручку миллионов.

Если , то из второго условия, это дает выручку миллионов.

Если же , то выручка составит (если и , то выручка очевидно меньше, чем в предыдущем примере)

Ответ.139 млн., 13 контейнеров A и 20 контейнеров B

**Пример 19.**

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере *S* тыс рублей. Условия его возврата таковы:

− каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

− в июле 2017,2018 и 2019 долг остаётся равным *S* тыс. рублей;

− выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;

− к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

**Решение:**

В июле 2017, 2018 и 2019 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют тыс. рублей.

В январе 2020 года долг (в тыс. рублей) равен , а в июле - .

В январе 2021 года долг равен , а в июле .

По условию, долг будет выплачен полностью, значит, , откуда .

Таким образом, первые три выплаты составляют по 110 тыс. рублей, а последние две – по 360 тыс. рублей.

Общая сумма выплат составляет:

(тыс. рублей).

Ответ.1050 тыс. рублей.

**Пример 20.**

Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

**Решение:**

Пусть – размер долга Жанны на конец месяца , – платеж Жанны в конце месяца . Мы знаем, что имеет место соотношение . Кроме того, мы знаем, что последовательность ( является арифметической прогрессией. При этом тыс. руб., а , так как в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность : . Значит,

Поскольку линейно зависит от i, последовательность также является арифметической прогрессией. Значит,

тыс. рублей.

Ответ.822 тыс. рублей.

# 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, понимание процентов и умение производить процентные расчеты в настоящее время необходимы каждому человеку. Проценты затрагивают финансовую, демографическую, экономическую, социологическую и другие стороны нашей жизни. Их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. Изучение банковских процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

В случае возникновения кредитных обязательств, я смогу рассчитать все платежи для уплаты банку вне зависимости от того какую процентную ставку предлагает банк (простые или сложные проценты), смогу рассчитать штрафные санкции в случае просрочки платежа.

Работа по данной теме для меня оказалась полезной, а также она принесла мне необходимые знания финансовой математики в сфере банковских процентов. Я считаю, цели, поставленные в работе, были достигнуты. Изучив специальную литературу, посвящённую простым и сложным процентам, я расширил свои математические навыки и научился самостоятельно решать задачи на простые и сложные проценты. Тем самым я подготовился к решению задач на простые и сложные проценты, которые содержатся в материалах ЕГЭ.

# 4. ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Гущин. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ: математика»
2. В. М. Козырев. «Основы современной экономики»
3. А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов. «Социально-экономические задачи»
4. <https://ege.sdamgia.ru/>
5. <https://100task.ru/subject/sample_fm.aspx>