Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение "Лицей №14 имени Заслуженного учителя Российской Федерации А.М.Кузьмина"

**Методическая разработка по теме:**

**«Решение задачи №19 ЕГЭ по профильной математике»**

Бурмистрова А.В.,

учитель математики

**ТАМБОВ**

**Оглавление**

[Введение и актуальность 3](#_Toc37957910)

[Виды задания №19 **Ошибка! Закладка не определена.**](#_Toc37957911)

[Числа и их свойства 3](#_Toc37957912)

[Свойства делимости целых чисел 4](#_Toc37957913)

[Работа с простыми и составными числами 6](#_Toc37957915)

[Работа с каноническим разложением натурального числа, количество делителей натурального числа 7](#_Toc37957916)

[Работа с НОД и НОК 8](#_Toc37957917)

[Числовые наборы на карточках и досках 11](#_Toc37957918)

[Последовательности и прогрессии 15](#_Toc37957919)

[Сюжетные задачи 18](#_Toc37957920)

[Вывод 21](#_Toc37957921)

[Используемая литература 22](#_Toc37957922)

Введение и актуальность

ЕГЭ в наше время является логическим завершением среднего образования большинства и от того, как вы сдадите эти экзамены в некоторой степени зависит дальнейшая жизнь и возможное высшее образование. И математика является обязательным предметом для всех без исключения выпускников. Несмотря на то, что большинство выбирают и сдают базовый уровень математики, профильный уровень всё равно востребован (в 2018 году 421 тысяча выпускников сдавала профильный уровень, а 567 тысяч человек – базовый уровень). 19 задача при правильном и полном решении даёт 4 первичных балла из 32, и вопреки распространённому мнению, получить 2 гарантированных балла за эту задачу может почти каждый ученик со средней успеваемостью по математике, а при должной подготовке решить и последний пункт этой задачи, дающий целых 2 первичных балла.

Задание №19 может быть 4 типов:

1. Числа и их свойства
2. Числовые наборы на карточках и досках
3. Последовательности и прогрессии
4. Сюжетные задачи: кино, театр, мотки верёвки и тому подобное

Рассмотрим каждый из типов поподробнее.

Числа и их свойства

 Как можно было понять из названия, работа в этом типе будет идти с целыми числами и их свойствами, такими как: делимость с остатком и без, вид этих чисел в различных системах счисления и другое.

 В зависимости от задачи можно использовать следующие методы:

1. Свойства делимости целых чисел (в частности, делимость на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11)
2. Работа с простыми и составными числами
3. Работа с каноническим разложением натурального числа, количество делителей натурального числа
4. Работа с НОД и НОК

Свойства делимости целых чисел

Для решения таких задач надо вспомнить признаки делимости на различные числа, также не лишним будет напомнить основные свойства делимости целых чисел.

 **Делимость на 2, 4, 8, 2^n:**

Числом кратным двум (чётным числом) является число, оканчивающееся на чётную цифру: 2, 4, 6, 8, 0.

Число кратно 4 если последние две цифры образуют число кратное 4. Например 144 оканчивается на 44, 44 делится на 4, значит и 144 делится на 4.

Число кратно 8 если последние три цифры образуют число кратное 8. Например 2864 оканчивается на 864, 864 делится на 8, значит и 2864 делится на 8.

Проанализировав эти три признака, можно вывести признак делимости на 2^n. Число кратно 2^n если его последние n цифр образуют число, кратное 2^n. Докажем это утверждение. Пусть у нас есть число $\overbar{a\_{1}a\_{2}a\_{3}\cdots a\_{m\_{+n}}}$ , m, n $\in N$. Раскладываем его как сумму $\overbar{a\_{1}a\_{2}a\_{3}…a\_{m}}\*10^{n}$ + $\overbar{a\_{m+1}a\_{m\_{+2}}…a\_{m+n}}$. По условию $\overbar{a\_{m+1}a\_{m\_{+2}}…a\_{m+n}}$ кратно 2^n, 10^n кратно 2^n, значит и $\overbar{a\_{1}a\_{2}a\_{3}…a\_{m}}\*10^{n}$ кратно 2^n. Следовательно и $\overbar{a\_{1}a\_{2}a\_{3}\cdots a\_{m\_{+n}}}$, что и требовалось доказать.

**Делимость на 3, 9:**

Число кратно 3 сумма цифр этого числа кратна 3. Например сумма цифр 141 равна 6, 6 делится на 3, значит и 141 делится на 3.

Число кратно 9 сумма цифр этого числа кратна 9. Например сумма цифр 981 равна 18, 18 делится на 9, значит и 981 делится на 3.

Но в отличие от 2, свойство делимости на остальные степени тройки не распространяется. Например, 54 кратно 27, но сумма цифр равна 9.

**Делимость на 5^n:**

Число кратно 5^n если его последние n цифр образуют число, кратное 5^n. Доказательство аналогично доказательству кратности 2^n.

**Делимость на 7:**

Пусть у нас есть число 10 \* а + b, где, а - какое-то натуральное число, а b – цифра. Тогда если |а – 2 \* b| кратно 7, то и 10 \* а + b кратно 7. Например 343: 34 – 6 = 28, 28 кратно 7, значит и 343 кратно 7.

**Делимость на 11:**

Число кратно 11 если модуль разности сумм цифр, стоящих на чётных и нечётных местах кратен 11. Например число 482735: | (4+2+3) – (8+7+5) | = 11 кратно 11, значит и 482735 кратно 11.

Конечно, существуют и другие признаки делимости, но они встречаются редко в ЕГЭ, поэтому их можно не рассматривать. Также можно вспомнить различные свойства делимости в общем:

1. Если a и b делятся на m, то числа a +b и a -b также делятся на m.
2. Если a и b делятся на m, то при любых целых числах k и l число a\*k $\pm $b\*l также делится на m.
3. Если a делится на m, а b не делится на m, то числа a$\pm $ b также не делятся на m.
4. Если a делится на m, а m делится на k $\in $N , то число a также делится на k .
5. Если a делится на m, а b не делится на m, то число a\*b делится на m.
6. Если a делится на каждое из чисел m и k, причем НОД(m, k) =1, то a делится на произведение m\*k .
7. Если a делится на m, то a\*k делится на m\*k при любом k $\in $N .
8. Если a\*b делится на m и b взаимно просто с m, то a делится на m.

Доказывать эти свойства не будем, так как они рассматриваются и доказываются в школьной программе.

Примеры

**Пример** **1.** *Натуральное* *число* 3*n*+2 *и* 8*n* +3 *делятся* *на* *натуральное* *число*

*p* $\ne $1*.* *Найти* *p*.

**Решение.** Так как числа 3n + 2 и 8n + 3 делятся p , то и число 8 ⋅(3n + 2) − 3(8n + 3) = 7 должно делиться на p . Но единственное натуральное число p ≠ 1, на которое делится 7, равно 7. Значит p = 7 . Например, при n = 4 получаем числа 14 и 35, которые делятся на 7. (В данной ситуации следует, используя свойства делимости найти выражение, не содержащее переменные)

Ответ: p = 7

**Пример 2**. («Сборник задач по алгебре. М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. М: Просвещение». №3.6)

*Докажите, что сумма квадрата целого числа и самого числа есть число четное*.

**Решение.** Пусть n- целое число. n²+n=n(n+1)- произведение 2-х последовательных чисел. Значит одно из них четное, а другое нечетное. Произведение четного и нечетного чисел есть число нечетное. Что и требовалось доказать.

Работа с простыми и составными числами

 Для начала вспомним определения простых и составных чисел.

*Простое число –* это число, у которого ровно два положительных делителя: единица и само число.

 *Составное число* – это число, у которого более двух положительных делителей.

Как мы можем заметить из этих определений, единица не является ни составным, ни простым числом.

 **Примеры.**

**Пример1.***Доказать,* *что* *число* *a* 41612 240 *делится* *на* 33.

 ***Решение*.** Так как 41612 22 448 250, то *a* 250 240 240 (210 1) 240 (25 1) (25 1) 240 3133, откуда следует, что *a* делится на 33.

 **Пример** **2.** *Доказать, что число* *a* 8*n*2 10*n*3 *является* *составным* *при любом* *натуральном* *n*.

***Решение*.** Число *a* является составным при любом натуральном *n*, поскольку *a* =8*n*2 10*n* 3 (2*n* 1) (4*n* 3), где числа 2*n* 1 и 4*n*3 натуральные, большие единицы.

Работа с каноническим разложением натурального числа, количество делителей натурального числа

*Каноническим* *разложением* *целого* *числа* *n* 1 называется представление *n* в виде

*n* *p*1k1 *p*2k2 ...*ps* *ks*

где *p*1, *p*2, ..., *ps* – попарно различные простые числа, а *k*1, *k*2, ..., *ks* – натуральные числа. Для отрицательных целых чисел *n* 1 каноническим разложением считается представление в виде

*n* *p*1k1 *p*2k2 ...*ps* *ks*

*Количество делителей натурального числа* можно посчитать по формуле (*n*) (*k*1 1)(*k*2 1)...(*ks* 1), где *k*1, *k*2, ..., *ks* – коэффициенты каноничного разложения этого числа.

**Примеры.**

**Пример** **1.** *Найти* *число* *различных* *делителей* *числа* 1440, *включая* *единицу* *и* *само* *число.*

***Решение*.** Запишем каноническое разложение числа 1440. Так как 1440 5288 5932, то 1440 25 32 51. Следовательно, (*n*) (51)(21)(11) 36. ***Ответ*:** 36.

**Пример** **2.** *Найти* *количество* *и* *сумму* *всех* *натуральных* *чисел*, *не* *превосходящих* 1000 *и* *имеющих* *нечетное* *число* *делителей.*

***Решение*.** Натуральное число, имеющее нечетное число делителей, является полным квадратом. Следовательно, чтобы ответить на первый вопрос задачи, нужно сосчитать количество чисел, являющихся квадратами и не превосходящими 1000. Наибольшим таким числом является 961312. Значит имеется 31 такое число.

Искомая сумма равна *S* 12 22 ...312. Используя формулу

*S*(*n*) 12 22 ...*n*2 *n*(*n* 1)(2*n* 1)

6

получаем *S*(31) 12 ...*n*2 313263 10416 .

6

***Ответ*:** 31 и 10416.

**Пример** **3.** *Найти* *число* *различных* *делителей* *числа* 1440, *включая* *единицу* *и* *само* *число.*

***Решение*.** Запишем каноническое разложение числа 1440. Так как 1440 5288 5932, то 1440 25 32 51. Следовательно, (*n*) (51)(21)(11) 36. ***Ответ*:** 36.

Работа с НОД и НОК

 *Наибольшим* *общим* *делителем*(НОД) натуральных чисел *a*1, *a*2, ..., *an* называется наибольшее натуральное число, на которое делятся данные числа.

*Наименьшим* *общим* *кратным*(НОК) – наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из этих чисел.

 Свойства:

1. НОД (a; b) = НОД (a; a + b);
2. НОД (a; b) = НОД (a; a - b);
3. a, b – взаимно простые числа, если НОД (a; b) = 1, верно и обратное;
4. a \* b = НОД (a; b) \* НОК (a; b)

Также стоит вспомнить алгоритм Евклида.

***Алгоритм Евклида*** - Для нахождения НОД двух чисел делят большее число на меньшее, и если получается ненулевой остаток, то делят меньшее число на остаток; если снова получается ненулевой остаток, то делят первый остаток на второй. Так продолжают делить до тех пор, пока в остатке не получится нуль. Последний делитель и есть НОД данных чисел.

Существует также вариация этого метода, где вместо деления используется вычитание, но он более занимает больше времени и шанс ошибки увеличивается.

Примеры

**Пример** **1*.*** *Найти* *все* *пары* *натуральных* *чисел,* *наименьшее* *общее* *кратное* *которых* *равно* 78, *а* *наибольший* *общий* *делитель* *равен* 13.

***Решение.*** Пусть *a* и *b* искомые числа. По условию (*a*, *b*) 13. Значит*a* 13*a*1 и *b* 13$b\_{1}$. Так как [*a*, *b*] 78, а 78 613, то, используя равенство НОД(*a*, *b*)\*НОК[*a*, *b*] *a**b*,получаем *a**b* 132 *a*1 $b\_{1}$ 132 6. Отсюда получаем *a*1 $b\_{1}$ 6. Следовательно, возможны случаи *a*1 1, $b\_{1}$ 6 и *a*1 2, $b\_{1}$ 3 (или *a*1 6, $b\_{1}$ 1 и *a*1 3, $b\_{1}$ 2). Тогда получаем две пары чисел, удовлетворяющие условию задачи (13, 78) и (26, 39).

***Ответ*:** (13, 78), (26, 39).

**Пример 2**. (МИОО, 2010). *Найти наибольший общий делитель всех чисел вида* $p^{2}-1$*, где p − простое число, большее 3, но меньшее 2010*.

**Решение**. Запишем $p^{2}-1=\left(p-1\right)\left(p+1\right)$. Заметим, что p −1, p и p +1− три числа, следующие в ряду натуральных чисел друг за другом. Значит, одно из них обязательно делится на 3. Так как p − простое, большее 3, то на 3 делится либо p −1, либо p +1. Кроме того, p −1 и p +1− два четных числа, следующие в ряду натуральных чисел друг за другом. Значит, одно из них делится на 4. Отсюда получаем, что в произведении ( p −1)( p +1) какой-то из множителей делится на 3, один делится на 2, а другой на 4, т.е. это произведение делится на 24. Так как при p = 5 получаем $p^{2}-1=24$, то 24 – наибольший общий делитель всех чисел вида $p^{2}-1$, где p − простое число (в том числе и меньшее 2010).

Ответ: 24.

**Практика**

**Задание 1** Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

 **Решение**

Пусть данное число равно *100a +10b +c*, где a, b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k, то выполнено *100a + 10b + c = ka + kb +kc.*

а) Если частное равно 90, то *100a + 10b + c = 90a + 90b +90c; 10a = 80b + 89 c,* что верно, например, при *c = 0, b =1, a =8*: частное числа 810 и суммы его цифр равно 90

б) Если частное равно 88, то *100a + 10b + c = 88a + 88b +88c; 12a = 78b + 87 c*. Получаем: *a <10; 12a <120; 78b + 87 c <120*. Значит, *b = 0, c =1* *или b = 1, c =0*. Но ни 78, ни 87 не делятся на 12. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k - наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100, и суммы его цифр. Тогда *100a+10b+c = ka + kb +kc; (100-k)a=(k-10)b + (k-1)c.* Учитывая, что b+c>0, получаем: 9(100-k) >= (100-k)a = (k-10)b +(k-1)c>=(k-10)(b+c)>=k-10, откуда 9(100-k)>=k-10 ⬄ 10k<=910⬄k<=91. Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в)91.

Числовые наборы на карточках и досках

Задачи такого вида довольно редки и довольно-таки однотипны. Для их решения понадобится та теория, что связана с целыми числами и их свойствами, часть которой мы вспомнили в прошлом разделе. Кроме-того будет не лишним вспомнить определения и понятия, связанные с числовыми рядами.

 ***Медиана ряда чисел*** – это число, которое стоит строго посередине ряда нечётного количества чисел, упорядоченного от наименьшего к наибольшему.

 ***Средним арифметическим*** ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

 ***Размахом*** ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

 ***Модой*** ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других. Ряд чисел может иметь более одной моды, а может не иметь моды совсем.

 Так как каких-то конкретных приёмов для такого типа задач нет, можно сразу перейти к практике и разбору конкретных случаев.

 **Практика**

***Задание 1*** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть 22 − 1 = 21. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна 41 − 7 − 8 − 10 = 16. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

***Задание 2*** На доске написано число 2015 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1009 чисел?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Решение.

Заметим, что если среди выписанных чисел есть число 1, то попарные суммы всех остальных чисел будут делиться на 1.

а) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 7, ..., 2015 (выписано 1008 нечётных чисел от 1 до 2015 и число 2). Сумма 1 и любого нечётного числа делится на 2, сумма 1 и 2 делится на 3, сумма любых двух чисел, отличных от 1, делится на 1. Другой пример: 1, 2, 3, ... , 1007, 2014, 2015. Если среди двух чисел нет 1, то их сумма делится на 1. Если вместе с 1 выписаны числа k и k + 1, то сумма первых двух делится на третье; оставшиеся суммы 1 + 1007 и 1 + 2015 делятся на 2. Третий пример: 1, 2, 3, 5, 6, ... , 1009, 2015 (в группе подряд идущих чисел пропущено 4).

б) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 2015. Другой пример — числа a, 2a, 3a, 4a, 5a, где a = 403.

в) Пример для четырёх чисел: 1, 2, 3, 2015. Другой пример — числа a, 2a, 3a, 5a, где a = 403. Покажем, что трёх чисел быть не может. Действительно, пусть три различных числа таковы, что a < b < c. Тогда a + b < 2b < b + c < 2c, откуда в силу делимости суммы двух меньших чисел на большее получаем: a + b = c. Тогда b < a + c = 2a + b < 3b, откуда в силу делимости а + с на b получаем: a + c = 2b. Тогда b = 2a, c = 3a, а искомая тройка чисел имеет вид a, 2a, 3a. По условию одно из этих чисел равно 2015, поскольку 2015 не делится ни на 2, ни на 3, им может быть только число a. Но в этом случае 3a > 5000. Противоречие. Приведём другое доказательство. Пусть даны числа a, b, c, и сумма любых двух из них делится на третье. Если они все имеют отличный от 1 наибольший общий делитель d, то на него можно сократить, и свойство делимости сохранится. Будем считать, что все три числа взаимно простые. Поскольку сумма двух чисел делится на третье, то сумма всех чисел делится на каждое. Числа попарно взаимно просты, поэтому их сумма должна делиться на произведение. В частности, a + b + c ≥ abc. Полагая a < b < c, имеем a + b + c < 3c, откуда ab < 3. Следовательно, a = 1, b = 2. При этом c + 3 делится на 2c, поэтому c = 3. Таким образом, тройка чисел должна иметь вид d, 2d, 3d. Поскольку 2015 нечётно и не делится на 3, оно равно d, но тогда 3d > 5000.

Ответ: а) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 7, ..., 2015; б) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 2015; в) 4, например, 1, 2, 3, 2015.

 ***Задание 3*** Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем среднее арифметическое результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа, потом среднее арифметическое полученного результата и пятого числа — число *A*.

а) Может ли число *A* равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?

б) Может ли число *A* быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?

в) Какое наибольшее целое число раз число *A* может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

a) Пусть начальные числа: a, b, c, d и e, тогда $A=\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}$. Поскольку равенство $\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}= \frac{a+b+c+d+e}{5}$⬄4d - 11(a + b)+6(4e - c)=0 Равенство 4 \* 11 – 11 \* 4 + 6(4 \* 2 – 8) = 0 верно. Поэтому искомыми числами являются 1, 3, 8, 11, 2.

б) Равенство $\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}= 5\*\frac{a+b+c+d+e}{5}= a+b+c+d+e$ приводит к равенству $15a+15b+14c+12d+8e=0$, что невозможно для натуральных слагаемых.

Вывод: нет.

 в) Пусть число A в k раз больше среднего арифметического. Тогда: $\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}=k \frac{a+b+c+d+e}{5}$⬄(16k-5)a + (16k-5)b + (16k-10)c + (16k-20)d + (16k-40)e = 0, что невозможно при k $\geq $ 3. Пример для k = 2: 1, 3, 4, 7, 35.

 Ответ: а) да, например: 1, 3, 8, 11, 2; б) нет; в) 2.

Последовательности и прогрессии

 В таком виде задач могут встречаться любые последовательности и прогрессии, но зачастую это либо арифметическая, либо геометрическая прогрессии. Также стоит отдельно вспомнить последовательность чисел Фибоначчи.

 *Последовательность* – это набор элементов множества, который удовлетворяет следующим условиям:

* для каждого натурального числа существует элемент данного множества;
* это число является номером элемента и обозначает позицию данного элемента в последовательности;
* для любого элемента последовательности можно указать следующий за ним элемент.

*Числовая последовательность* – это функция переменной n, которая принадлежит множеству натуральных чисел N. $x\_{n}=f\left(n\right)$

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют *арифметической прогрессией*. **an+1 = an + d** ,  n є N

 Сумма n членов арифметической прогрессии: $s\_{n}=\frac{a\_{n}+a\_{1}}{2}⋅n=\frac{2a\_{1}+ⅆ\left(n-1\right)}{2}⋅n$

*Геометрической прогрессией* называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число. Таким образом, геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, заданная соотношениями *bn+1 =bn· q, где bn ≠ 0, q ≠ 0, q – знаменатель прогрессии.*

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $s\_{n}=\frac{b\_{1}\left(q^{n}-1\right)}{q-1}, q\ne 1$

Сумма n первых членов, бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $s\_{n}=\frac{b\_{1}}{q-1}, \left|q\right|<1$

Чи́сла Фибона́ччи — элементы числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, …, в которой первые два числа равны 1 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

**Практика**

**Задание 1** В строку подряд написано 1000 чисел. Под каждым числом *a* первой строки напишем число, указывающее, сколько раз число *a* встречается в первой строке. Из полученной таким образом второй строки аналогично получаем третью: под каждым числом второй строки пишем, сколько раз оно встречается во второй строке. Затем из третьей строки так же получаем четвёртую, из четвёртой — пятую, и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Докажите, что 11‐я строка совпадает с 12‐й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10‐я строка не совпадает с 11‐й.

**Решение.**

а) Очевидно, что начиная со второй строчки, все числа в таблице не больше 1000. Кроме того, каждое число не больше написанного под ним. Поэтому сумма чисел в третьей строчке не меньше, чем во второй и т.д., и каждая из этих сумм не больше миллиона. Следовательно, поскольку все время суммы возрастать не могут, в каких-то соседних строчках суммы совпадут, а тогда совпадут и сами строчки.

б) Докажем, что если в m-ой строчке при m>=2, число отлично от написанного над ним, то оно не меньше, чем $2^{m-2}$. Действительно, для m = 2 это очевидно, так как все числа второй строки натуральные. Пусть это уже проверено для всех строк с номерами, меньшими m. Пусть в m-1-ой строчке написано число a, а под ним написано число b, большее a. Тогда в m-2-ой строчке написано b чисел, равных a. Ясно, что в m-2-ой строчке будет написано несколько групп одинаковых чисел, по a в каждой группе, причем числа из разных групп различны. Отсюда вытекает, что b делится на a, то есть b>=2a. Кроме того, по крайней мере одно из чисел в этих группах отличается от a а значит, по предположению индукции $a\geq 2^{\left(m-1\right)-2}$. Итак, $b\geq 2a\geq 2^{m-2}$. Наше утверждение доказано по индукции для всех m>=2. Если предположить, что 11-я строчка отлична от 12-й, то какое-то число в 12-й строчке будет больше, чем $2^{12-2}=1024>1000, что невозможно.$

в) Приведем такой пример:

0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488

1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488

2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 1488

4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488

…………………………………………………………….

256, ……………………………., 256, 488, …, 488

1 512, ……………………………., 512, 488, …, 488

В первой строчке 0 и 1 встречаются по одному разу, 2 — два раза, 4 — четыре раза, 8 — восемь раз, …., 256 — 256 раз, 488 — встречается 488 раз, в 11 строчке встречается 512 раз число 512 и 488 раз число 488.

**Задание 2** Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4,… выделить арифметическую прогрессию

а) длиной 4

б) длиной 5

в) длиной *k*, где *k* — любое натуральное число?

Решение

а) Например, годится такая прогрессия: 1/6, 1/8, 1/12, 1/24;

б) Например, годится такая прогрессия: 1/24, 1/30, 1/40, 1/60, 1/120;

в) Ясно, что последовательность является арифметической прогрессией с разностью $-\frac{1}{k!}$. Кроме того, каждый член такой последовательности можно сократить так, чтобы в числителе была единица. Значит, все они являются членами исходной последовательности.

Сюжетные задачи

Как можно было понять из названия, в таком типе задач описывается какая-то особая ситуация кино, театр, мотки верёвки и тому подобное. Четкое определение всему виду дать трудно и зачастую приходится подбирать нужную теорию и формулы к каждой задаче в частном порядке. Отдельно можно отметить два подвида: работа с дробями и теория игр. В теории игр нет какой-либо особой теории, там надо последовательно разбирать случаи и варианты ходов игроков. А для задач с дробями, нужны лишь основные принципы и знания, которые проходят в школе.

**Практика**

**Задание 1** Два игрока ходят по очереди. Перед началом игры у них есть поровну горошин. Ход состоит в передаче сопернику любого числа горошин. Не разрешается передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто‐то в этой партии передавал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход по правилам, — считается проигравшим. Начинающий или его соперник победит в этой игре, как бы ни играл партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) у каждого по две горошины;

б) у каждого по три горошины;

в) у каждого по *N* горошин.

**Решение.**

а) Первый игрок либо отдаст второму две горошины (на это второй даст ему одну, и у первого не будет ходов), либо отдаст одну. В этом случае второй игрок может отдать ему две горошины, назад получит три, отдаст четыре и победит. Так или иначе выигрывает второй игрок.

б) Если первый игрок отдаст три или две, назад получит одну и сразу проиграет. Если же отдаст одну, то назад получит две. Далее у первого два варианта хода, но оба плохи: отдав 4, он получит назад 3 и проиграет, а отдав 3, получит 4, будет вынужден отдать 5, получит 6 и всё равно проиграет.

в) Победит второй игрок, придерживаясь правила: «всякий раз отдавай минимально возможное число горошин». Докажем, что это действительно выигрышная стратегия. Достаточно показать, что у второго игрока всегда будет ход. Начинает игру у нас первый игрок, но мы схитрим и сделаем так, чтобы игру начинал второй: предположим, что второй (условно) передаёт сначала первому 0 горошин. Теперь можно видеть, что всякий раз в ответ на ход второго первый игрок вынужден будет отдать ему больше, чем сам получил. Поэтому количество горошин у второго с каждым парным ходом будет увеличиваться хотя бы на одну. Перед *K*-ом ходом у него будет не менее *N* + *K* горошин. А отдать на *K*-ом ходу он в соответствии со своей стратегией должен не более 2*K* горошин. Это осуществимо, поскольку более чем *N* ходов игра длиться не может, а значит *N* + *K* ≥ 2*K*.

**Задание 2** Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть

а) 34;

б) 35;

в) 56 игр?

Решение.

а) Да, мог. Например, если первый с третьим сыграли 21 игру, второй с третьим - 13 игр, а первый со вторым - 4 игры.

б) Нет, не мог. Действительно, в таком случае общее число сыгранных партий было бы равно (25 + 17 + 35)/2 = 38,5 игр — не целое число.

в) Нет, не мог. Пусть такое возможно, тогда третий игрок сыграл больше партий, чем первый и второй вместе взятые (25 + 17 < 56). Но других соперников у третьего не могло быть, поэтому получаем противоречие.

**Задание 3** Леша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Если Гриша правильно называет число, или же одну цифру называет правильно, а в другой ошибается не более чем на единицу, то Леша отвечает «тепло»; в остальных случаях Леша отвечает «холодно». (Например, если задумано число 65, то назвав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услышит в ответ «тепло», а в остальных случаях услышит «холодно».)

а) Покажите, что нет способа, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 18 попыток.

б) Придумайте способ, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 24 попытки (какое бы число ни задумал Леша).

в) А за 22 попытки получится?

Решение.

а) Расположим двузначные числа в клетках прямоугольника высоты 9 и ширины 10 (по горизонтали откладываем единицы, по вертикали – десятки). Каждой попытке Гриши соответствует крестик из пяти клеток: в центре названное им число, а по бокам четыре числа, отличающиеся в одной цифре на единицу (если названное число содержит цифру 0 или 9, некоторые клетки крестика выходят за края прямоугольника; таким клеткам никакие числа не соответствуют). Задача Гриши – покрыть прямоугольник 9 × 10 такими крестиками. Убедимся, что 18 крестиков ему не хватит. Суммарная площадь крестиков равна 18 × 5 = 90, т. е. равна площади прямоугольника. Но, покрывая угловую клетку, мы неизбежно выйдем за пределы прямоугольника, и эта потеря помешает покрыть весь прямоугольник.

в) Решим сразу пункт в) — убедимся, что 22 попыток хватит. Покрытие из 22 крестиков легко найти, если заметить, что крестиками можно выложить плоскость без перекрытий (правда, придётся ещё добавить несколько крестиков по краям прямоугольника). Например, Гриша может назвать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97.

Вывод

Были изучены основные виды 19 задачи из ЕГЭ по профильной математике, рассмотрена необходимая теория и решены типичные для каждого из видов задачи.

Используемая литература

1. <https://infourok.ru/podgotovka-uchaschihsya-k-resheniyu-olimpiadnih-zadach-na-delimost-klassi-1154972.html>
2. <https://math-ege.sdamgia.ru/>
3. <https://mirurokov.ru/>
4. <https://calcs.su/html/math/grade7/srednee-arifmeticheskoe.html>
5. <https://mathlesson.ru/ege2020fipi-yashenko36var-1var>
6. <https://alexlarin.net/>
7. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных)