ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. **АННУИТЕТНЫЕ ПЛАТЕЖИ**

Определение.

Аннуитетный платёж – вариант ежемесячного (ежегодного) платежа по кредиту, когда размер ежемесячного (ежегодного) платежа остается постоянным на всем периоде кредитования..

При решении экономических задач на аннуитетные платежи примем следующие обозначения величин:

|  |
| --- |
| ***S*** – сумма кредита,  ***х*** – ежегодный (ежемесячный) платёж,  ***r*** – процентная ставка,  ***p = 1 +*** .  ***n*** – срок кредитования. |

Решение задач на аннуитетные платежи удобно оформлять в виде таблицы. Рассмотрим примеры решения задач.

**Задача 1.**

В июле 2021 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 96500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Решение.**

Пусть ***S рублей*** – сумма кредита,

***r = 20*** %, тогда ***p = 1 + 20/100 = 1,2***.

***n = 3 года***.

***х*** – годовой платёж,

тогда ***3х*** – общая сумма платежа за 3 года,

***3х – S = 96500***.

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *х* | *p2 S –p х – х* |
| **3** | *p2 S –p х – х* | *p3 S –p2 х – pх* | *x* | *p3 S –p2 х – pх – x = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

p3 S – p2 х – pх – x = 0.

Подставим вместо S выражение 3х – 96500.

p3 ∙ (3х – 96500) – p2 х – pх – x = 0.

3p3∙ х – 96500 p3– p2 х – pх – x = 0.

Теперь выразим из этого уравнения переменную *х*:

х ∙ (3p3 – p2 – p – 1) = 96500 p3,

*х* = = .

*3х* = .

Подставив p = 1,2, получим общую сумму выплат за три года:

*3х* = 324000 рублей.

**Ответ: 324000 рублей.**

**Задача 2.**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
* ежегодные выплаты не превышают 300 000 рублей.

На какое минимальное число рублей сумма выплат может превышать размер кредита?

**Решение.**

***S = 1 000 000 рублей*** – сумма кредита,

***r = 10*** %, тогда ***p = 1 + 10/100 = 1,1***.

Для того, чтобы переплаты были минимальными, нужно, чтобы сумма ежегодных выплат принимала наибольшую возможную сумму. Поэтому примем ***х = 300 000 рублей***, за исключением последнего платежа, сумма которого может быть меньше предыдущих платежей.

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | 1. *000 000* | *1,1 ∙ 1 000 000 = = 1 100 000* | *300 000* | *1 100 000 – 300 000 =*  *= 800 000* |
| **2** | *800 000* | *1,1 ∙ 800 000 =*  *= 880 000* | *300 000* | *880 000 – 300 000 =*  *= 580 000* |
| **3** | *580 000* | *1,1 ∙ 580 000 =*  *= 638 000* | *300 000* | *638 000 – 300 000 =*  *= 338 000* |
| **4** | *338 000* | *1,1 ∙ 338 000 =*  *= 371 800* | *300 000* | *371 800 – 300 000 =*  *= 71800* |
| **5** | *71 800* | *1,1 ∙ 71 800 =*  *= 78 980* | *78 980* | *78 980 – 78 980 = 0.* |

Общая сумма выплат равна:

4 ∙ 300 000 + 78 980 = 1 278 980 (рублей).

Наименьшее значение переплат за весь срок кредитования:

1 278 980 – 1 000 000 = 278 980 (рублей).

**Ответ: 278 980 рублей**

**Задача 3 (для самостоятельного решения).**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
* ежегодные выплаты не превышают 400 000 рублей.

На какое минимальное число рублей сумма выплат может превышать размер кредита?

**Ответ: 526 400 рублей.**

**Задача 4.**

31 декабря 2020 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 14,5 %), затем Дмитрий переводит в банк ***х рублей***. Какой должна быть сумма ***х***, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т.е. за два года)?

**Решение.**

***S = 4 290 000 рублей***,

***r = 14,5***%, тогда ***p = 1,145.***

***n = 2 года***.

***х*** – годовой платёж,

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *х* | *p2 S –p х – х = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

*p2 S – pх – x = 0*.

Выразим из этого уравнения ***х***:

*p2 S – х ∙ (p + 1) = 0*,

*p2 S = х ∙ (p + 1),*

*х* = ,

Подставим числа, данные в условии задачи, вместо букв S и p:

*х* = = 2 622 050.

**Ответ: 2 622 050 рублей.**

**Задача 5 (для самостоятельного решения).**

31 декабря 2020 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Алексей переводит в банк ***х рублей***. Какой должна быть сумма ***х***, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

**Ответ: 2 296 350 рублей**.

**Задача 6.**

31 декабря 2020 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Ярослав переводит в банк ***2 132 325 рублей***. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

**Решение.**

Пусть ***S рублей – сумма, взятая в кредит***,

***r = 12,5***%, тогда ***p = 1,125.***

***n = 4 года***.

***х = 2 132 325 рублей – ежегодные платежи***,

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *х* | *p2 S –p х – х = 0* |
| **3** | *p2 S –p х – х* | *p3 S –p2 х – pх* | *x* | *p3 S –p2 х – pх – x = 0* |
| **4** | *p3 S –p2 х – pх – x* | *p4 S –p3 х – p2 х –px* | *х* | *p4 S –p3 х – p2 х –px – x = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

*p4 S –p3 х – p2 х –px – x = 0*.

Выразим из этого уравнения ***S***:

*p4 S – х ∙ (p3 + p2 + p + 1) = 0*,

*p4 S = х ∙ (p3 + p2 + p + 1),*

*S* = ,

Подставим числа, данные в условии задачи, вместо букв x и p:

*х* = = 6 409 000.

**Ответ: 6 409 000 рублей**.

**Задача 7 (для самостоятельного решения).**

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга, равную 399 300 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т.е. за три года)?

**Ответ: 993 000 рублей.**

**Задача 8 (для самостоятельного решения).**

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга, равную 207 360 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

**Ответ: 536 800 рублей.**

**Задача 9.**

31 декабря 2020 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 20 %), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, сели бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

**Решение.**

***S = 7 007 000 рублей***,

***r = 20***%, тогда ***p = 1,2.***

***n1 = 3 года,***

***n2 = 2 года***.

***х рублей – ежегодные платежи***.

1. Заполним таблицу для ***n1 = 3***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *х* | *p2 S –p х – х = 0* |
| **3** | *p2 S –p х – х* | *p3 S –p2 х – pх* | *x* | *p3 S –p2 х – pх – x = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

*p3 S – p2 х –px – x = 0*.

Выразим из этого уравнения переменную *х*:

*p3 S –* х ∙ (p2 + p + 1) = 0,

*p3 S =* х ∙ (p2 + p + 1),

*х* = ,

*3х* = = = 9 979 200.

1. Заполним таблицу для ***n2 = 2***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *х* | *p2 S –p х – х = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

*p2 S – px – x = 0*.

Выразим из этого уравнения переменную *х*:

*p2 S –* х ∙ (p + 1) = 0,

*p2 S =* х ∙ (p + 1),

*х* = ,

*2х* = = = 9 172 800.

1. 9 979 200 – 9 172 800 = 806 400 (рублей).

**Ответ: 806 400 рублей.**

**Задача 10 (для самостоятельного решения).**

31 декабря 2020 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, сели бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

**Ответ: 506 250 рублей.**

**Задача 11.**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 75 000 рублей, а во второй год – 46 000 рублей. Найдите число r.

**Решение.**

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *75 000* | *р S – 75 000* |
| **2** | *р S – 75 000* | *p2 S – 75 000 p* | *46 000* | *p2 S – 75 000 p – 46 000 = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

*p2 S – 75 000 p – 46 000 = 0*.

Поскольку S = 100 000, то получаем квадратное уравнение:

*100 000 p2 – 75 000 p – 46 000 = 0,*

*100 p2 – 75 p – 46 = 0,*

Положительный корень этого уравнения равен:

*p = 1,15,*

откуда ***r = 15 %****.*

**Ответ: 15 %.**

**Задача 12 (для самостоятельного решения).**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 68 000 рублей, а во второй год – 59 000 рублей. Найдите число r.

**Ответ: 18 %.**

**Задача 13.**

Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270 200 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 % оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платёж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причём каждый его следующий платёж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

**Решение.**

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *3х* | *p2 S –p х – 3х = 0* |
| **3** | *p2 S –p х –3 х* | *p3 S –p2 х – 3pх* | *9x* | *p3 S –p2 х – 3pх – 9x = 0* |

В последней ячейке таблицы мы получили уравнение:

*p3 S –p2 х – 3pх – 9x = 0*.

Выразим из этого уравнения переменную *х*:

*p3 S –* х ∙ (p2 + 3p + 9) = 0,

*p3 S =* х ∙ (p2 + 3p + 9),

*х* = ,

*х* = = 26 620.

**Ответ: 26 620 рублей.**

**Задача 14 (для самостоятельного решения).**

Георгий взял кредит в банке на сумму 270 200 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 % оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платёж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причём каждый его следующий платёж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

**Ответ: 133 100 рублей.**

**Задача 15.**

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что если каждый год выплачивать по 292 820 рублей, то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 534 820 рублей, то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите число r.

**Решение.**

***Пусть S рублей – сумма кредита***,

***n1 = 4 года***, при этом ***х = 292 820 рублей –*** ежегодные платежи,

***n2 = 2 года,*** при этом ***у = 534 820 рублей –*** ежегодные платежи.

1. Заполним таблицу для ***n1 = 4***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *х* | *р S – х* |
| **2** | *р S – х* | *p2 S –p х* | *х* | *p2 S –p х – х = 0* |
| **3** | *p2 S –p х – х* | *p3 S –p2 х – pх* | *x* | *p3 S –p2 х – pх – x* |
| **4** | *p3 S –p2 х – pх – x* | *p4 S –p3 х – p2х – px* | *x* | *p4 S –p3 х – p2х – px – x = 0* |

1. Заполним таблицу для ***n2 = 2***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов (руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты (руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *у* | *р S – у* |
| **2** | *р S – у* | *p2 S –p у* | *у* | *p2 S –p у – у = 0* |

В последних ячейках таблиц мы получили два уравнения:

*p4 S –p3 х – p2х – px – x = 0* и *p2 S –p у – у = 0*.

Умножим второе уравнение на p2, а затем вычтем из него первое уравнение:

*(p3 у – p3 х) + (p2 у – p2 х) – (pх + х) = 0,*

*p3 (у – х) + p2 (у – х) – х (p + 1) = 0,*

*p2 (у – х) (p + 1) = х (p + 1).*

Поскольку *p –* число положительное, то число *(p + 1) –* также является положительным числом. Поэтому обе части уравнения можно разделить на *(p + 1)*.

*p2 (у – х) = х,*

*p2 = ,*

*p2 =* = 1,21.

***p =* 1,1.**

Значит, r = 10 %.

**Ответ: 10 %.**

**Задача 16 (для самостоятельного решения).**

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что если каждый год выплачивать по 216 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 366 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите число r.

**Ответ: 20 %.**

**Задача 17.**

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита (в млн. рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн. рублей.

**Решение.**

***r = 10***%, тогда ***p = 1,1.***

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов**  **(млн. руб.)** | **Долг после начисления процентов (млн. руб.)** | **Выплаты**  **(млн. руб.)** | **Долг после выплаты (млн. руб.)** |
| **1** | *S* | *р S* | *р S - S* | *S* |
| **2** | *S* | *р S* | *р S - S* | *S* |
| **3** | *S* | *р S* | *р S - S* | *S* |
| **4** | *S* | *р S* | *x* | *р S – x* |
| **5** | *р S – x* | *p2х – px* | *x* | *p2х – px – x = 0* |

1. Рассмотрим уравнение в последней ячейке таблицы:

*p2х – px – x = 0.*

Выразим из этого уравнения ***х***:

*p2х – х (p +1) = 0,*

*p2х = х (p +1),*

*х = = = .*

1. Общая сумма выплат равна:

*3 ∙ (р S – S) + 2х = 3 ∙ (р S – S) + 2S ∙ = S ∙ (3p – 3 + 2 ∙ ) = … = S ∙ .*

По условию, эта сумма меньше 8 млн. рублей, тогда

*S ∙ < 8,*

*S < ≈ 5,508…*

При этом S – целое число миллионов рублей. Значит, S = 5 (млн. рублей).

**Ответ: 5 млн. рублей.**

**Задача 18 (для самостоятельного решения).**

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита (в млн. рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн. рублей.

**Ответ: 6 млн. рублей.**

**Задача 19.**

Гражданин Гусев взял кредит в банке, рассчитывая погасить долг равными ежегодными платежами, каждый из которых (кроме, возможно, последнего) составляет половину суммы S, взятой в кредит. Схема выплаты кредита следующая: в конце каждого года банк увеличивает на 25 % оставшуюся сумму долга, а затем гражданин Гусев переводит в банк очередной платёж. После двух лет выплат банк снизил процентную ставку до 20 % годовых, и гражданин Гусев внёс третий платёж. Четвёртым платежом долг был полностью погашен. Сколько процентов от первоначальной суммы S составлял четвёртый платёж по кредиту гражданина Гусева?

**Решение.**

***r1 = 25***%, тогда ***p1 = 1,25.***

***r2 = 20***%, тогда ***p2 = 1,2.***

Заполним таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг до начисления процентов**  **(руб.)** | **Долг после начисления процентов (руб.)** | **Выплаты**  **(руб.)** | **Долг после выплаты (руб.)** |
| **1** | *S* | *1,25 S* | *0,5 S* | *1,25 S – 0,5 S = 0,75 S* |
| **2** | *0,75 S* | *1,25 ∙ 0,75 ∙ S =*  *= 0,9375 ∙ S* | *0,5 S* | *0,9375 ∙ S – 0,5 ∙ S = = 0,4375 ∙ S* |
| **3** | *0,4375 ∙ S* | *1,2 ∙ 0,4375 ∙ S = 0,525 ∙ S* | *0,5 S* | *0,525 S - 0,5 S =*  *= 0,025 S* |
| **4** | *0,025 S* | *1,2 ∙ 0,025 ∙ S =*  *= 0,03 ∙ S* | *0,03 ∙ S* | *0,03 ∙ S – 0,03 ∙ S = 0* |

= 0,03 = 3 %.

**Ответ: 3 %.**